تقارن

در هندسه و جبر

ترجمهٔ پرویز شهریاری

کتابهای سیمرغ

۷

تقارن

در هندسه و جبر

ترجمه: پرویز شهریاری

چاپ سوم

آذر ۱۳۵۰

مجموعهٔ کتابهای علمی ، تاریخی و فلسفی

زیر نظر : پرویز شهریاری

تقارن درهندسه و جبر: ناشر : مؤسسهٔ انتشارات امیرکبیر
چاپ : چاپخانهٔ سپهر ـ تهران ـ آذرماه ۱۳۵۰

مقدمهٔ چاپ دوم

سه مقاله‌ای که در این کتاب از نظر خوانندگان می‌گذرد از مجلهٔ معروف « ریاضیات در دبیرستان » چاپ اتحاد شوروی سالهای ۱۹۶۳ و ۱۹۶۴ ترجمه شده است ، دو مقالهٔ اول برای بار اول در مجلهٔ « مهرگان » و مقالهٔ سوم در مجلهٔ « یکان » چاپ شده است .

دربارهٔ تقارن مطالب بسیار می‌توان گفت و ابتدا نظر براین بود که با توجه به یادداشتهای متعددی که در این زمینه فراهم آورده بودم ، مشروح‌تر بحث شود ولی موقع تنظیم دریغم آمد که قالب این مقالات را بهم بزنم ، زیرا این مقالات به همین صورت خود می‌تواند مورد استفادهٔ خاص دانش‌آموزان و دانشجویان واقع شود .

آنچه را که از تقارن باقی می‌ماند برای بحث دیگر و جلد دیگری از این مجموعه باقی می‌گذاریم .

مترجم

مقدمهٔ چاپ سوم

چاپ سوم این کتاب وقتی منتشر می‌شود که کتاب بسیار جالب «تقارن در جبر» دردسترس همگان قراردارد.

آنچه راکه درکتاب کوچك حاضر می‌بینید باید به عنوان ورود به تقارن تلقی‌کرد . برای اطلاع بیشتر و دقیق‌تر به کتاب «تقارن درجبر» که از همین مترجم و به وسیلهٔ همین ناشرمنتشر شده است مراجعه فرمائید .

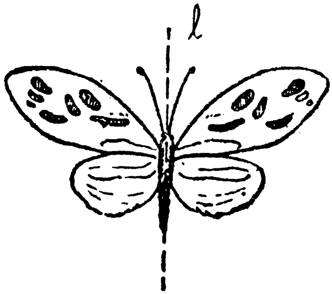
مترجم

۱

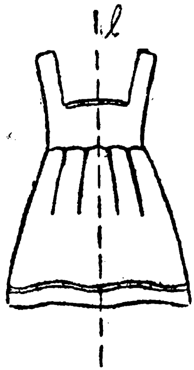
تقارن محوری

تعریف تقارن محوری

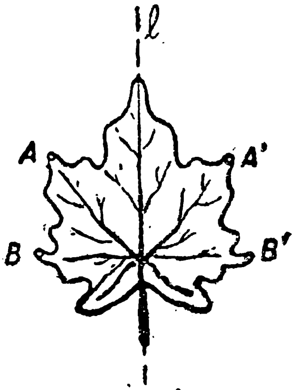
تصاویر ۱ تا ۳ را ببینید. چنین اشکالی را ما معمولاً «منظم» یا «متقارن» می‌نامیم. درهریك ازاین اشکال خط قائم l که به طور نقطه چین رسم شده است شکل را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند، به این معنی که درطرف راست وچپ این خط دوقسمت ازشکل قرار گرفته است که کاملاً باهم شبیه‌اند. در مورد قسمتهای راست و چپ هریك از اشکال ۱ تا ۳ گویند که آنها نسبت به خط l متقارنند.



تصویر ۱



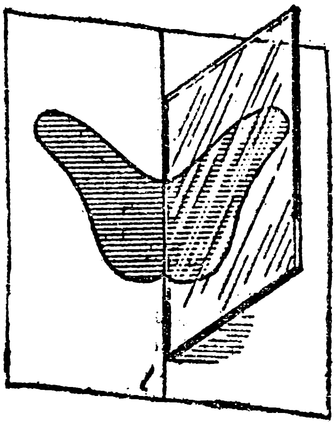
تصویر ۲



تصویر ۳

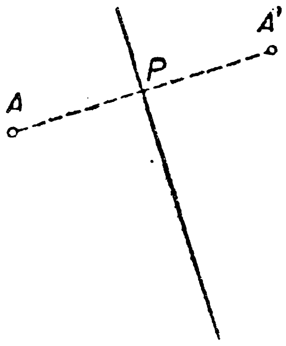
اشکال متقارن را به‌ترتیب زیر نیز می‌توان به‌دست آورد:

روی یك صفحه خط دلخواهی مانند l رسم می‌کنیم و در یك طرف آن تصویری می‌کشیم (مثلاً خط منحنی که دو نقطه l را به‌هم وصل کرده باشد) اکنون یك آینه عمود بر صفحهٔ شکل چنان قرار می‌دهیم که کنارهٔ آن بر خط l منطبق باشد. در آینه شکلی خواهیم دید که نسبت بـه خط l متقارن با شکل رسم شده خواهد بود (تصویر ۴).



تصویر ۴

اکنون تعریف تقارن نسبت به خط l را ذکر



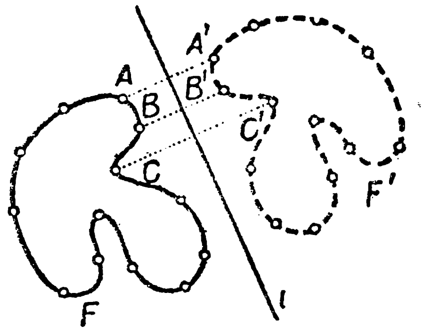
تصویر ۵

می‌کنیم :

نقاط A و A' را نسبت به خط l متقارن گویند به شرطی که پاره خط AA' بر l عمود بوده و به وسیلهٔ آن نصف شود (تصویر۵)، دراینصورت خط l را **محور تقارن** دو نقطهٔ A و A' گویند . فرض کنید روی صفحه ، خط غیر مشخص l داده شده باشد در‌اینصورت برای هر نقطهٔ A یك نقطهٔ A' به دست می‌آیدکه قرینهٔ A نسبت به l است. برای به‌دست‌آوردن A' می‌توان از نقطهٔ A عمود AP را بر l فرود آورد و سپس آنرا به‌اندازهٔ $PA'=AP$ امتداد داد. درحالت خاصی‌که نقطهٔ A بر l منطبق باشد قرینهٔ آن بر خودش قرار خواهد گرفت . اگر نقطهٔ A' قرینهٔ A نسبت به l باشد ، A هم قرینهٔ A' نسبت به l خواهد بود. به‌همین مناسبت می‌توان گفت که A و A' **قرینهٔ یکدیگر** نسبت به l هستند و یا

ساده‌تر : A و 'A **نسبت به خط l متقارن‌اند .**

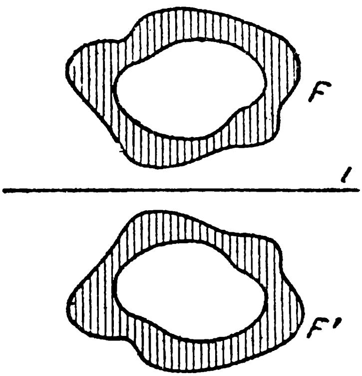
حالا فرض می‌کنیم که به جز خط l ، شکل F ومثلاً یك پاره خط ، یك منحنی ، یك دایره ، یك مثلث ، یك ذوزنقه و یا هر شکل دلخواه دیگری روی صفحه قرار گرفته باشد. نقطهٔ دلخواهی از این شکل مانند A را در نظر گرفته و 'A قرینهٔ آنرا نسبت به l پیدا می‌کنیم (تصویر ۶) ،



تصویر ٦

سپس ، نقطهٔ B از F را انتخاب کرده و 'B قرینهٔ آنرا نسبت به l معین می‌کنیم. به‌همین ترتیب 'C قرینهٔ C وغیره. دراینصورت به‌هر تعداد که بخواهیم نقاطی مانند 'A و 'B و 'C

و ... خواهیم داشت که قرینهٔ A و B و C و ... شکل F نسبت به خط l خواهند بود ویا به زبان ریاضی : مجموعهٔ بی‌نهایت نقطه‌که قرینهٔ شکل F را نسبت به‌خط l تشکیل می‌دهند . این مجموعهٔ بی‌نهایت نقاط A' و B' و C' و... شکل F' را به‌وجود می‌آورند که در تصویر ۶ با خط‌چین نشان داده شده است . **شکل F' را قرینهٔ شکل F نسبت به خط l** گویند. به این ترتیب در هریك ازتصاویر ۱ تا ۳ قسمت سمت‌چپ رامی‌توان قرینهٔ سمت‌راست نسبت به‌خط دانست . درتصویر ۷ هم نمونهٔ دیگری از قرینه نسبت به خط l نشان داده شده است .



تصویر ۷

به این ترتیب می‌توان تعریف زیر را قبول کرد :

شکل F' را قرینهٔ شکل F نسبت به‌خط l گویندوقتی که هر نقطهٔ این‌شکل قرینهٔ نقطه‌ای از شکل F نسبت به خط l باشد .

برای هرشکل F و هر خط l که در صفحهٔ F واقع باشد شکلی مانند F′ وجود دارد که قرینهٔ F نسبت به l می‌باشد. تبدیل هرشکل F را به قرینهٔ آن F′ **تقارن نسبت به خط l** و یا به طور خلاصه **تقارن محوری** گویند.

۲ـ آزمایش :

وسایل لازم : خط‌کش و کاغذ شطرنجی .

ساختن اشکال متقارن روی کاغذ شطرنجی :

با کمك خط کش و مداد خط l را روی یکی از خطهای کاغذ شطرنجی رسم کنید. دریك طرف این خط شکلی و مثلاً یك منحنی بسته به نام F رسم کنید . روی شکل F با دقت یك ردیف نقطه راعلامت بگذارید و برای هر نقطه، قرینهٔ آنرا نسبت به خط l پیدا کنید (و این کار با کمك کاغذ شطرنجی به سادگی انجام می‌گیرد) سپس نقاط به دست آمده را به‌هم وصل کنید، شکل F′ قرینهٔ F نسبت به l به‌دست می‌آید.

۳ـ اشکالی که محور تقارن دارند .

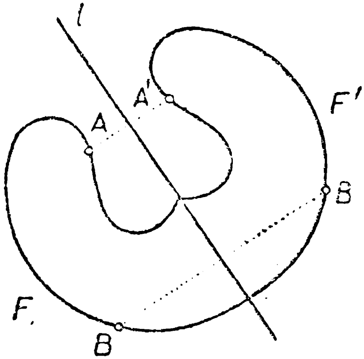
تقارن محوری ، هر شکل F را به قرینهٔ آن F′ نسبت به خط l تبدیل می‌کند. اگر به عنوان شکل اولیه، F′ را

در نظر بگیریم ، قرینهٔ محوری آن F خواهد شد .

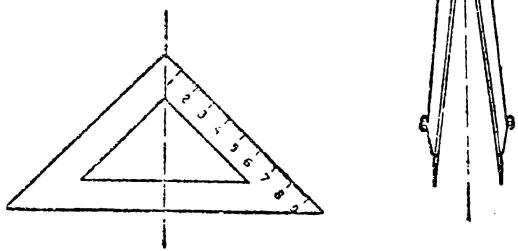
در تقارن محوری اشکال F و F′ جا یشان با یکدیگر عوض می‌شود (یعنی هر یك از آنها به دیگری تبدیل می‌شود).

اکنون اگر هردو شکل F و F′ را با هم به عنوان شکل اولیه به حساب آوریم، دراینصورت در تقارن محوری، F و F′ به یکدیگر تبدیل می‌شوند واین به معنای آن است که همهٔ شکل به خودش تبدیل می‌شود. این وضع در تصاویر ۱ و ۲ و ۳ دیده می‌شود. قرینهٔ محوری هر یك ازاین اشکال نسبت به l برخود شکل منطبق می‌شود. به عبارت دیگر اگر نقطهٔ دلخواهی مانند A از شکل در نظر گرفته شود ، F′ قرینهٔ آن نسبت به محور بر نقطه‌ای از خود شکل منطبق خواهد شد (تصویر ۳ را ببینید) . اشکالی را که دارای این خاصیت باشند **اشکال متقارن نسبت به خط** l گویند .

تعریف ـ شکل F را نسبت به محور l متقارن گویند به شرطی که قرینهٔ F نسبت به l برخود F منطبق گردد (یعنی F′ قرینهٔ F نسبت به l برخود F قرار گیرد ـ تصویر ۸) .



تصویر ۸



تصویر ۹

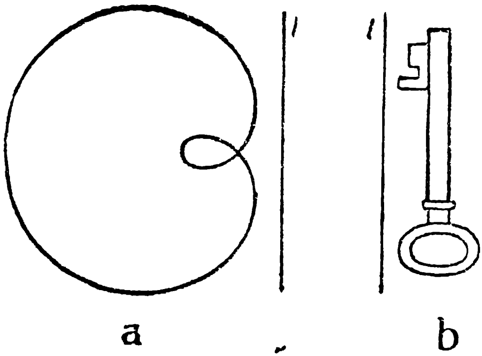
اگر شکلی نسبت به یك خط متقارن باشد، آن خط را **محور تقارن** شکل گویند (تصاویر ۱ تا ۳ را ببینید).

اشکالی هم که در تصویر ۹ داده شده‌اند دارای محور

تقارن هستند (ویا به طور خلاصه متقارن‌اند) .

مسائل و تمرینات :

۱ـ اشکالی را که در تصویر ۱۰ می‌بینید روی یك کاغذ رسم کرده و قرینهٔ هریك از آنها را نسبت به محور l رسم نمایید .



تصویر ۱۰ .

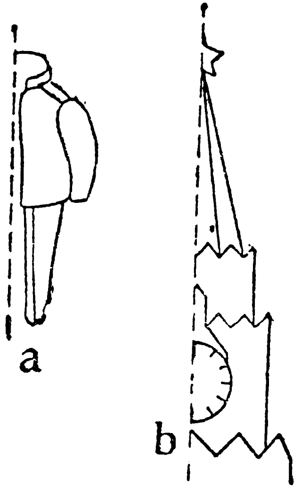
۲ـ قسمت چپ اشکال متقارنی را که در تصویر ۱۱ رسم شده است روی یك کاغذ رسم کنید و آنها را تکمیل نمایید .

۳ ـ محور تقارن هریك از اشکال تصویر ۱۲ را

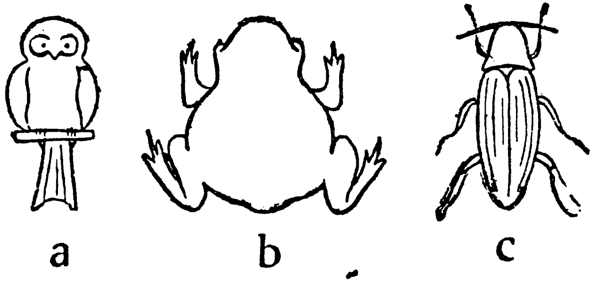
نشان دهید .

۴ ـ محور های تقارن اشکال تصویر ۱۳ را نشان دهید. کدامیك از آنها محور تقارن نـدارند ؟ کـدامیك بیش از یك محـور تقـارن دارند ؟

۵ـ در بین حروف الفبای فارسی چند حرف دارای محور تقارن هستند ؟ بین حروف الفبای لاتین چطور ؟



تصویر ۱۱



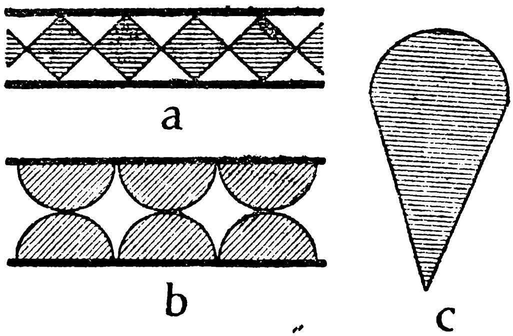
تصویر ۱۲

۶ـ آیا یك شکل نا محدود (و یا محدود) می‌تواند دارای بی‌نهایت محور تقارن باشد ؟

۷ـ از چند جسم نام ببرید که تصویر آنها روی کاغذ دارای محور تقارن باشد .

۴ـ تا کردن صفحهٔ کاغذ .

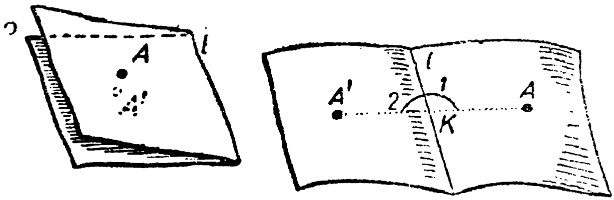
روی صفحهٔ کاغذ خط l را رسم کنید و نقطهٔ A را



تصویر ۱۳

خارج این خط در نظر بگیرید . آنوقت صفحهٔ کاغذ را روی خط l تا کنید بطوری‌که هردونیمهٔ کاغذ روی‌هم قرار گیرد . در اینصورت نقطهٔ A بر نقطه‌ای از نیمهٔ دوم کاغذ قرار خواهد گرفت که آنرا 'A می‌نامیم . حالا صفحهٔ کاغذ

را بازکنید، ثابت می‌کنیم‌که دونقطهٔ A و A' نسبت به خط l قرینهٔ یکدیگرند (تصویر ۱۴)



تصویر ۱٤

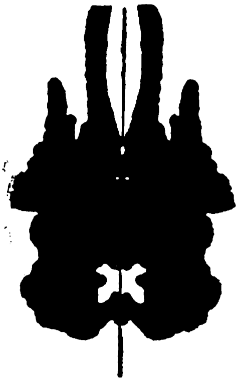
A و A' را به وسیلهٔ یك پاره خط به هم وصل‌کنید. ضمن تا کردن زوایای ۱ و ۲ از تصویر ۱۴ بر هم منطبق شده و بنابراین با هم برابر خواهند بود. از طرف دیگر این دو زاویه مکمل یکدیگرند و بنابراین $\hat{1} = \hat{2} = 90^\circ$ همچنین از انطباق نقاط A و A' (ضمن تا کردن کاغذ) نتیجه می‌شود که پاره‌خطهای KA و KA' با یکدیگر برابرند. به این ترتیب AA' بر l عمود بوده و به وسیلهٔ این خط به دو قسمت مساوی تقسیم شده است و این هم به معنای آن است‌که دو نقطهٔ A و A' نسبت به خط l قرینهٔ یکدیگرند.

عکس این مطلب هم درست است یعنی:

اگر دو نقطهٔ A و A' قرینهٔ یکدیگر نسبت به l باشند، ضمن تا کردن صفحه روی خط l ، نقاط A و A' روی هم قرار خواهد گرفت .

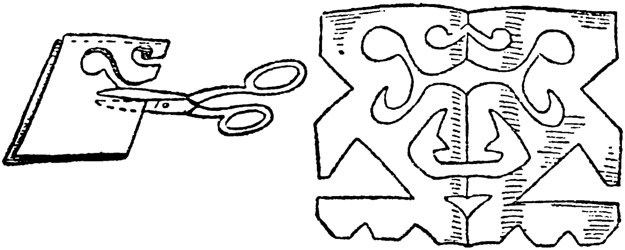
درحقیقت از تقارن A و A' نتیجه می‌شود که AK و AK' با یکدیگر برابر بوده و برخط l عمودند . K پای عمود AA' بر خط l است . بنابراین ضمن تا کردن صفحهٔ کاغذ پاره خط KA بر KA' قرار گرفته و A و A' بر هم منطبق می‌شوند .

به‌این ترتیب به‌وسیلهٔ تا کردن هم‌می‌توان اشکال متقارن را به دست آورد ، یعنی اگر در یك طرف خط l ، شکل را با مرکب سیاه رسم کنیم ، پس از تا کردن قرینهٔ آن F' در طرف دیگر l رسم خواهد شد (تصویر ۱۵)، همچنین می‌توان ابتدا کاغذ را تا کرد وسپس با قیچی از کاغذ تا شده قسمتهایی را برید . پس از باز کردن کاغذ



تصویر ۱۵

شکل متقارنی خواهیم داشت (تصویر ۱۶)



تصویر ۱۶

مسائل و تمرینات :

در تمرینات زیر بایستی صفحهٔ کاغذ را چندین بارتا نمود به طوری‌که خطوط کاغذ روی آنها تا شده شکل مورد نظررا بسازند (ویا محل تلاقی این خطوط نقطهٔ مورد نظررا معین کنند) .

۸ـ روی صفحهٔ کاغذ سه نقطهٔ A و B و C انتخاب کنید وباکمك تا کردن کاغذ و بدون هیچ کمکی از هندسه و یا ساختمانهای هندسی : a) مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ، b) مرکز دایرهٔ محاطی مثلث را به دست آورید .

۹ ـ روی صفحهٔ کاغذ دو نقطهٔ A و B را در نظر

بگیرید و سپس با کمك تا کردن کاغذ مربع ABCD را بسازید .

۱۰ ـ دو نقطهٔ A و B را روی کاغذ انتخاب کرده و با کمك تا کردن کاغذ مثلث متساوی الاضلاع ABC را بسازید .

۱۱ ـ با کمك یك صفحهٔ کاغذ و یك قیچی شکلی بسازید که : a) دارای یك محور تقارن باشد (مثل تصویر ۱۴) . b) دارای دو محور تقارن عمود بر هم باشد . c) دارای سه محور تقارن باشد . d) دارای چهار محور تقارن باشد .

۵ـ آزمایش :

وسایل لازم : خط کش ، کاغذ کالك رسم ، کاغذ شطرنجی مربوط به آزمایش شمارهٔ ۲ .

ساختن اشکال متقارن با کمك کاغذ کالك ـ کاغذ کالك را روی کاغذ شطرنجی که روی آن دو شکل F و F' متقارن نسبت به l رسم شده‌است قراردهید. باکمك خط کش خط l و شکل F را روی کاغذ کالك رسم کنید، سپس کاغذ

را از روی کاغذ شطرنجی برداشته و آنرا روی خط l چنان تاکنیدکه شکل رسم شدهٔ F در قسمت بیرون صفحهٔ تا شدهٔ کالك قرار گیرد و روی صفحهٔ دوم کالك شکل F را کپیه کنید . اکنون اگر صفحه را باز کنید در یکطرف l شکل F و درطرف دیگر آن شکل F′ قرینهٔ آنرا خواهید دید . حالا دوباره کاغذ کالك را روی صفحهٔ میلیمتری قرار دهید و وجود تقارن بین F و F′ را آزمایش کنید .

۶ـ خواص تقارن محوری

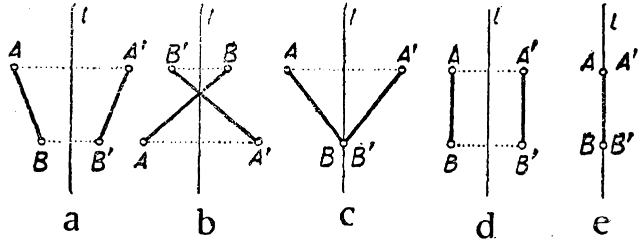
خواص تقارن محوری که در زیر بیان می‌شود ناشی از رابطهٔ تقارن محوری با تاکردن صفحه می‌باشد .

قضیهٔ ۱ـ دو شکلی که نسبت به خط l متقارنند باهم برابرند .

در حقیقت اگر صفحهٔ کاغذ را روی l تا کنیم F بر قرینهٔ خود F′ منطبق می‌شود و بنابر این با هم برابرند . قضایای زیر حالتهای خاصی از قضیهٔ ۱ می‌باشند .

قضیهٔ ۲ـ قرینهٔ هر پاره خط AB پاره‌خطی است مانند A′B′ که با AB برابر است .

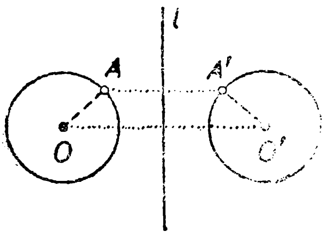
واضح است که در اینصورت دو انتهای A′ و B′ از



تصویر ۱۷

پاره‌خط $A'B'$ قرینهٔ دو انتهای A و B از پاره خط AB خواهد بود اوضاع مختلفی که پاره خط AB نسبت به محور l خواهد داشت در تصویر ۱۷ نشان داده‌شده است .

قضیهٔ ۳ـ قرینهٔ هر دایرهٔ به شعاع r دایره‌ای است به شعاع r.



تصویر ۱۸

مرکز دایرهٔ قرینه یعنی O' قرینهٔ مرکز دایرهٔ اصلی نسبت به خط l یعنی O خواهد بود (تصویر ۱۸). در حقیقت اگر A نقطهٔ دلخواهی از دایره و A' قرینهٔ

آن نسبت به l باشد بنا برقضیهٔ ۱ خواهیم داشت :

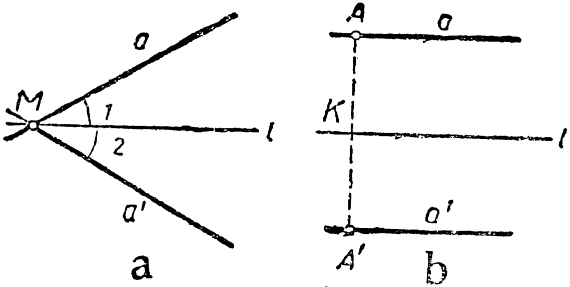
$$O'A' = OA = r$$

با توجه به حالتهای مختلف تقارن یك پاره خط که درتصویر ۱۷ نشان داده‌شده است قضیهٔ زیرروشن خواهدبود:

قضیهٔ ۴ـ اگر دو خط a و a' نسبت به خط l متقارن باشند. یادر نقطه‌ای ازخط l یکدیگر را قطع خواهند کرد که‌دراینصورت با خط l زوایای مساوی‌می‌سازند ویاهردو باخط l موازیند که در اینصورت ازخط l به‌یك فاصله خواهندبود.

اثبات ـ فرض کنید a محور l را در نقطهٔ M قطع کرده باشد « تصویر ۱۹ـ a » ضمن تا کردن کاغذ روی خط l ، خط a در وضع جدید خود یعنی a' قرار خواهد گرفت . از آنجا که نقطهٔ M ضمن تا کردن صفحه ثابت می‌ماند به‌ناچار a' هم از M خواهدگذشت وبا توجه به‌شکل، واضح است که زوایای ۱ و ۲ با هم برابر خواهند بود زیرا ضمن تاکردن کاغذ برهم منطبق می‌گردند .

اکنون فرض می‌کنیم که خط a با l موازی باشد



تصویر ۱۹

«تصویر ۱۹- b» دراینصورت قرینهٔ a یعنی 'a هم نمی‌تواند خط b را قطع‌کند زیرا درغیر اینصورت بایستی a هم خط l راقطع نماید وازآنجا 'a هم با l موازی می‌شود. ازطرف دیگر فواصل a و 'a از خط l عبارتست از طولهای AK و A'K فواصل دو نقطهٔ متقارن A و 'A از خط l . ولی می‌دانیم که طبق تعریف تقارن بایستی $AK=A'K$ باشد.

مسائل و تمرینات :

۱۲ــ چه نقاط «یاخطوطی» ضمن تقارن نسبت به‌خط l برخودشان منطبق می‌شود ؟

۱۳ــ S را دایرهٔ دلخواه و 'S را قرینهٔ آن نسبت

به‌خط l فرض می‌کنیم . ثابت‌کنید که اگر S خط l را قطع نکند S′ هم آنرا قطع نخواهد کرد و اگر S بر l مماس باشد ، S′ هم در همان نقطه بر l مماس خواهد بود و اگر S خط l را در دو نقطه قطع کند S′ هم l را در همان دو نقطه قطع خواهد کرد .

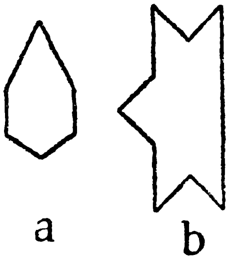
۱۴ــ BD رانیمساز زاویهٔ ABC فرض‌کنید. ثابت کنید که B′D′ قرینهٔ BD نسبت به خط l نیمساز زاویهٔ A′B′C′ قرینهٔ ABC نسبت به‌خط l خواهد بود .

۱۵ــ ABC و A′B′C′ را دو مثلث قرینهٔ هم نسبت به خط l فرض کنید ، اگر M محل تلاقی میانه‌های مثلث ABC باشد ثابت‌کنید M′ قرینهٔ M هم محل تلاقی‌میانه‌های مثلث A′B′C′ خواهد بود .

۱۶ــ محور تقارن هر یك از اشکال تصویر ۲۰ را نشان دهید و سپس قرینهٔ هر رأس آن را نسبت به محور تقارن معین کنید .

۱۷ــ دو پاره خط AB و CD مفروض اند ، ثابت کنیدکه تنها وقتی این دوپاره خط می‌توانند نسبت به خطی

مانند l قرینهٔ یکدیگر باشندکه اولاً: AB و CD برابر باشند. ثانیاً: نقاط A و B و C و D نقاط واقع برمحیط یك دایره ویا نقاط واقع بر یك خط راست باشند.

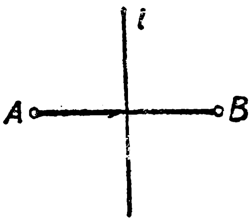


تصویر ۲۰

۷ـ چندمثال ازاشکال متقارن

بسیاری ازاشکالی که در دورهٔ هندسهٔ مقدماتی مورد مطالعه قرار می‌گیرند دارای محور تقارن هستند ویا به‌عبارت دیگر متقارن‌اند.

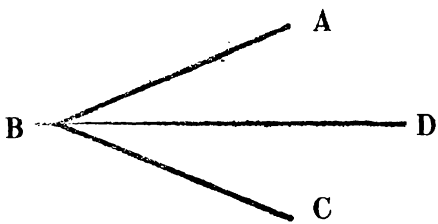
محور تقارن پاره خط AB، خط l عمودمنصف آن است (تصویر ۲۱). درحقیقت قرینهٔ AB نسبت به l پاره خط دیگری است که دو انتهای آن قرینهٔ دو انتهای AB می‌باشد (قضیهٔ ۲ شمارهٔ ۶). اما معلوم است که A قرینهٔ B و B قرینهٔ A نسبت به خط l است. بنابر-



تصویر ۲۱

این قرینهٔ AB نسبت به l برخودش منطبق می‌شود و یا به عبارت دیگر l محور تقارن آن است .

محور تقارن زاویهٔ ABC نیمساز آن BD می‌باشد (تصویر ۲۲). درحقیقت در تقارن نسبت به خط BD، نیم‌خط BA بر نیم خط BC و بر عکس BC بر BA قرار خواهد

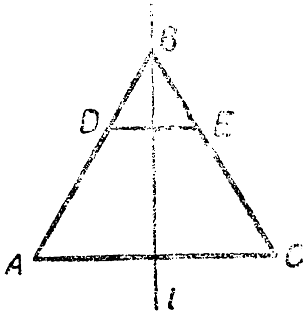


تصویر ۲۲

گرفت (قضیهٔ ۴ شمارهٔ ۶) واین به معنای آن است‌که زاویهٔ ABC‌ضمن تقارن نسبت به BD برخودش منطبق می‌شود .

محور تقارن مثلث متساوی الساقین، نیمساز l زاویهٔ رأس آن‌است (تصویر ۲۳). درحقیقت در تقارن‌نسبت به‌خط l نیم‌خط BA بر نیم خط BC منطبق خواهد شد و برعکس

چون پاره خطهای BA و BC با هم برابرند، ضمن تقارن نسبت به l یکی بردیگری منطبق خواهدشد واین به معنای



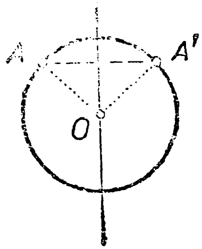
تصویر ۲۳

آنست که‌در تقارن نسبت به‌خطl،متساوی‌الساقین مثلث ABC برخودش منطبق‌خواهدشد .

اکنون خطی عمود بر محورl رسم می‌کنیم تا ساقهای مثلث را در نقاط D وE قطع کند (تصویر۲۳). ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین ACED را به دست خواهیم آورد ، چون D وE دو نقطهٔ قرینه نسبت به خط l هستند بنابراین خط l محور تقارن ذوزنقهٔ متساوی الساقین ACED نیزخواهد بود .

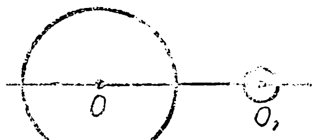
محور تقارن دایره هر خط دلخواهی است که از مرکز آن O عبور کرده باشد (تصویر ۲۴) . در حقیقت در تقارن نسبت به l قرینهٔ نقطهٔ O برخودش قرار خواهد گرفت و قرینهٔ نقطهٔ دلخواهی مانند A از دایره نقطه‌ای

مانندA' خواهد بود به طوری‌که : $OA=OA'$ « قضیهٔ ۱ شمارهٔ۶ » واز آنجا نتیجه می‌شودکه نقطهٔ A' هم بر روی محیط دایره حرکت می‌کند یعنی دایـره در تبدیل قرینه، بر خودش قرار می‌ـ گیرد .



تصویر ۲٤

بالاخره دو دایـره با مراکـز O و O_1 درنظرمی‌گیریم «تصویر۲۵ ». خط OO_1 هم محور تقارن دایرهٔ O وهم محور تقارن دایرهٔ O_1 است . بنابراین OO_1 محور تقارن شکلی است‌که از دو دایره تشکیل شده است : در تقارن نسبت به OO_1 هر یك از دو دایره به خودش تبدیل می‌شود بنابراین شکل مرکب ما که از دو دایره تشکیل شده است نیـز تبدیل به خودش خواهد شد .



تصویر ۲۵

مسائل و تمرینات

۱۸ـ کدامیك از چند ضلعی های زیر دارای محور تقارن هستند : مثلث غیر مشخص ، مثلث متساوی الساقین ، مثلث متساوی الاضلاع ، متوازی الاضلاع ، لوزی ، مربع ، ذوزنقهٔ غیر مشخص ، ذوزنقهٔ متساوی الساقین ، پنج ضلعی منتظم ، شش ضلعی منتظم و n ضلعی منتظم ؟ در هرمورد به طور دقیق تعداد محورهای تقارن رامشخص کنید .

۱۹ـ کدامیك از اشکال زیر محور تقارن دارند : دایره ، نیم دایره ، قطاع دایره ، قطعهٔ دایره ، قسمتی از دایرهٔ واقع بین قطر AB و وتر AC با زاویهٔ ۴۵ درجه ($BAC=۴۵°$) ، دایره‌ای که‌از نقطهٔ M دومماس MA و MB با زاویهٔ ۶۰ درجه بر آن رسم شده است، عدسی‌ای که از تقاطع دودایرهٔ غیرمساوی به وجودآمده‌است، عدسی‌ای که از تقاطع دو دایرهٔ مساوی تشکیل شده است ، حلقه‌ای که از دو دایرهٔ متحدالمرکز به وجود آمده است ، حلقه‌ای که ازدودایره بامراکز مختلف به وجود آمده است ؟ کدامیك ازاین اشکال بیش ازیك محورتقارن دارند ؟

۲۰ــ شکلی که به ترتیب زیر تشکیل شده باشد چند محور تقارن دارد :

a) دوخط متقاطع . b) دوخط متوازی . c) دو خط منطبق برهم .

۲۱ــ پاره خط AB چند محور تقارن دارد ؟

۲۲ــ مثلث حداکثر چند محور تقارن می‌تواند داشته باشد ؟

۲۳ــ ثابت کنیدکه اگرمثلثی دارای دو محور تقارن باشد حتماً محورتقارن سومی هم خواهد داشت .

۲۴ ــ a) تمام انواع چهار ضلعی‌های محدب را که دارای محور تقارن هستند نام ببرید . b) تمام انواع چهار ضلعی‌هایی که ۲ ویا بیش از۲ محورتقارن دارند نام ببرید .

۲۵ــ حداکثر تعداد محورهای تقارنی که یك چهار ضلعی می‌تواند داشته باشد چنداست ؟

۲۶ ــ a) تمام انواع چهار ضلعی های مقعری که دارای محورتقارن هستند نام ببرید . b) تمام انواع چهار-

ضلعی‌های مقعری که ۲ یا بیش از ۲ محور تقارن دارند نام ببرید .

۲۷ ـ a) چهار ضلعی کامل به‌چهارضلعی‌ای گویند که اضلاع روبه روی‌آن باهم متقاطع باشند . تمام انواع چهار-ضلعی‌های کامل را که دارای محور تقارن هستند معین کنید . b) تمام انواع چهار ضلعی‌های کامل را که دارای ۲ یا بیش از ۲ محور تقارن هستند معین‌کنید .

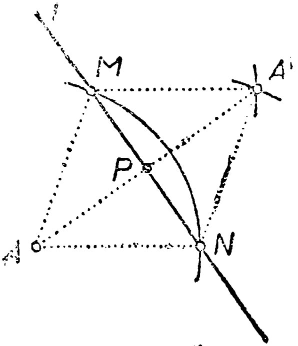
۸ـ ساختن اشکال متقارن

مسئلهٔ ۱ـ قرینهٔ نقطهٔ A را نسبت به خط l رسم کنید .

حل ـ ازنقطهٔ A عمود AP را برخط l فرود می-آوریم (مثلاً به‌کمك خط‌کش وگونیا) و روی امتداد AP طول $PA'=AP$ را جدا می‌کنیم ، A' قرینهٔ A خواهد بود .

همچنین می‌توان با کمك پرگار قرینهٔ A را نسبت به خط l پیداکرد، بدین‌ترتیب‌که به مرکز A وشعاع دلخواه دایره‌ای چنان رسم می‌کنیم تا l را در نقاط M وN قطع

کند(تصویر۲۶)،سپس M و N
را مرکز قرار می‌دهیم و با
همان شعاع قوسهایی رسم
می‌کنیم تا یکدیگر را در
A′ قطع‌کنند A′ قرینهٔ A
خواهدبود،زیرا MANA′
لوزی است و بنابراین
اقطار آن عمود منصف



تصویر ۲۶

یکدیگرند .

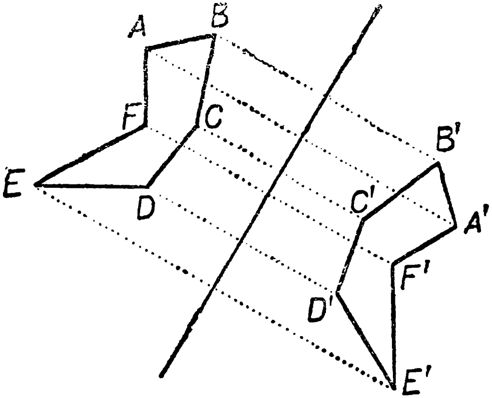
مسئلهٔ ۲ـ قرینهٔ پاره خط AB را نسبت به l پیدا کنید .

حل ـ A′ و B′ قرینه‌های A و B را نسبت به خط l پیدامی‌کنیم (مسئلهٔ ۱) پاره خط A′B′ قرینهٔ AB نسبت به l خواهد بود .

مسئلهٔ۳ـ قرینهٔ یك چند ضلعی را نسبت به خط l پیدا کنید .

حل ـ A′و B′و C′و. . . قرینه‌های نقاط A و B و

و C و... را نسبت به خط l پیدا می‌کنیم. باوصل این نقاط به یکدیگر چند ضلعی بدست خواهد آمد که قرینهٔ چند ضلعی مفروض نسبت به l خواهد بود (تصویر۲۷).



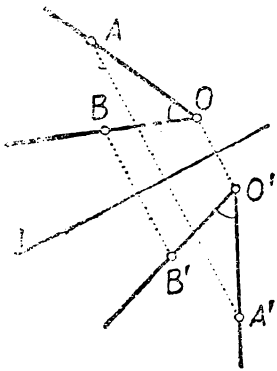
تصویر ۲۷

مسئلهٔ۴ـ قرینهٔ زاویهٔ AOB را نسبت به خط l پیدا کنید.

حل ـ O را رأس و B و A را دونقطهٔ دلخواه ازدو ضلع این زاویه فرض می‌کنیم. اگر 'O و 'A و 'B قرینه‌های O و A و B را نسبت به l پیدا کنیم زاویهٔ 'A'O'B قرینهٔ زاویهٔ AOB نسبت به خط l خواهد بود. (تصویر۲۸).

مسئلهٔ ۵ـ قرینهٔ یك دایره را نسبت به خط l پیدا کنید.

حل ـ 'O قرینهٔ O را نسبت بـه l پیدا می کنیم ، دایرهٔ به مرکز 'O و شعاع R (شعاع دایـرهٔ O) قرینهٔ مطلوب خواهد بود . (قضیهٔ ۳ شمارهٔ ۶) .



تصویر ۲۸

مسائل و تمرینات :

۲۸ـ دو نقطهٔ A و B مفروض است ، خط l را چنان رسم کنید که A و B قرینهٔ یکدیگر نسبت به آن باشند .

۲۹ـ دوخط a و b مفروض اند ، خط l را چنان رسم کنیدکه a و b نسبت به آن قرینهٔ یکدیگر باشند .

۳۰ـ دو دایرهٔ مساوی F و G داده شده ، خطی مانند l چنان رسم کنیدکه F و G قرینهٔ یکدیگر نسبت به آن باشند .

۳۱ـ مثلث ABC دردست است، قرینهٔ این مثلث را رسم کنید : a) نسبت به میانهٔ AM . b) نسبت به نیمساز AD . c) نسبت به‌ارتفاع AH .

۳۲ ـ مثلث ABC مفروض‌است . قرینهٔ‌آن را نسبت به MN (خطی که اوساط دوضلع AB و AC را به هم وصل کرده است) پیداکنید .

۳۳ ـ قرینهٔ متوازی الاضلاع ABCD را : a (نسبت به قطر AC آن . b) نسبت بـه MN ، خطی که اوساط دوضلع روبه روی‌آنرا به‌هم وصل‌کرده است ، پیداکنید .

۳۴ـ دایرهٔ F و وتر AB از آن مفروض است . F' قرینهٔ F را نسبت به AB پیداکرده وعدسی‌که از تقاطع F و F' به‌دست می‌آید هاشور بزنید .

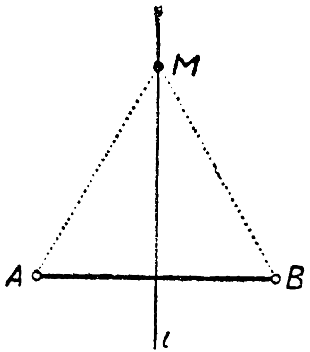
۳۵ـ شش ضلعی منتظم ABCDEF روی صفحه داده شده ، شش ضلعی منتظم A'B'C'D'E'F' را چنان رسم کنیدکه قرینهٔ شش ضلعی ABCDEF نسبت به قطر AC آن باشد وچند ضلعی راکه ازتقاطع دوچند ضلعی به دست

می‌آید هاشور بزنید و توضیح دهید که این چندضلعی چگونه چند ضلعی است ؟

۹ـ مورد استعمال محور تقارن در اثبات قضایا :

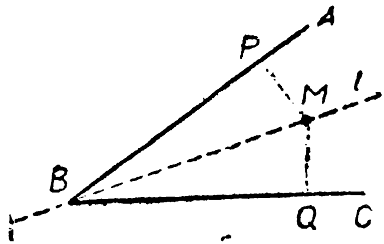
بسیاری از قضایای دورهٔ هندسهٔ مقدماتی و بسیاری قضایای جدید رامی‌توان باکمك محور تقارن اثبات کرد . دراینجا نمونه‌هایی ازاین قبیل رانذکر می‌کنیم :

هر نقطهٔ M واقع بر خط l ، عمود منصف AB، از دو نقطهٔ A و B به یك فاصله است (تصویر ۲۹) . در حقیقت A و B نسبت به خط l متقارن‌اند و بنابراین MA و MB با هم برابر خواهند بود (قضیهٔ ۲ شمارهٔ۶) .



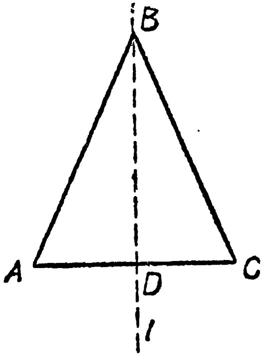
تصویر ۲۹

هر نقطهٔ M از نیمساز زاویهٔ A B C l از دو ضلع زاویه به یك فاصله‌است(تصویر ۳۰). درحقیقت اگر صفحه



تصویر ۳۰

را روی نیمساز l تا کنیم BA بر BC منطبق می‌شود و بنا بر این عمود MP که از M بر AB فرودآمده برعمود MQ که از M برBC فرود آمده منطبق خواهد شد .

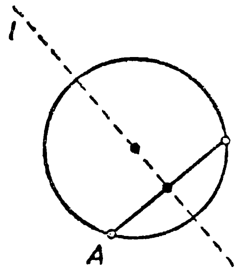


تصویر ۳۱

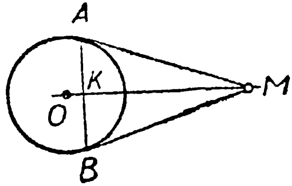
زوایای مجاور به قاعدهٔ AC از مثلث متساوی الساقین ABC باهم برابرند و نیمساز زاویهٔ B ازاین مثلث برمیانه وارتفاع وارد بر AC ازاین مثلث نیز منطبق است (۳۱)

این مطلب از اینجا نتیجه می‌شود که BD محور تقارن مثلث ABC است و ضمن تا کردن مثلث روی نیمساز BD، زاویهٔ BAC برزاویهٔ BCA و پاره خط AD برپاره خط CD و زاویهٔ ADB بر زاویه CDB منطبق می‌شود .

قطر l که عمود بر وتر AB از دایره ، رسم شده است ، وتر را نصف می‌کند (تصویر ۳۲) . و این بدان مناسبت است که l محور تقارن دایره است . نقطهٔ A قرینهٔ نقطهٔ B نسبت به این محور تقارن است .



تصویر ۳۲



تصویر ۳۳

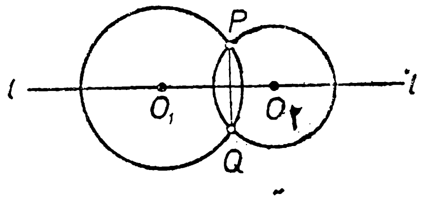
مماسهای MA و MB که از نقطهٔ M واقع در خارج دایره بر آن رسم‌شده‌اند با هم برابرند و این مماسها با وتر AB دو زاویهٔ مساوی می‌سازند و همچنین MO ، خطی که M را به مرکز دایره وصل می‌کند عمودمنصف پاره خط AB است (تصویر ۳۳) . OM

محور تقارن دایره‌است و مماس MA ، که تنها یك نقطهٔ مشترك با دایره دارد ، در قرینهٔ نسبت به OM بر خطی منطبق می‌شود که بازهم تنها یك نقطهٔ مشترك بادایره داشته باشد ، یعنی بر مماس MB . در تقارن نسبت به OM پاره خط MA برپاره خط MB و زاویهٔ MAB بر زاویهٔ MBA و پاره‌خط AK بر پاره خط BK وزاویهٔ MKA برزاویه MKBمنطبق خواهد شد . بنابراین :

$$\widehat{MAB}=\widehat{MBA} \text{ ،} \quad MA=MB$$

$$\widehat{MKA}=\widehat{MKB}=۹۰^\circ \text{ و } AK=BK$$ ، می‌شود .

PQ وتر مشترك دو دایره ، بر خط المرکزین O_1O_2 عمود بوده وبه وسیلهٔ آن به دو قسمت مساوی تقسیم می‌شود (تصویر ۳۴) . O_1O_2 محور تقارن شکلی

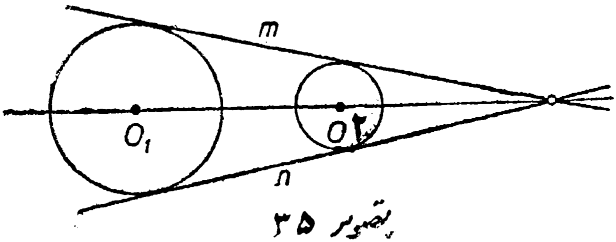


تصویر ۳٤

است که از دو دایره تشکیل شده است . P نقطهٔ مشترك

دو دایره ، قرینهٔ Q نقطهٔ دیگر مشترك دو دایره نسبت به O_1O_2 خواهد بود بنابراین قضیهٔ مطلوب ثابت است .

مماسهای مشترك خارجی (وهمچنین مماسهای مشترك داخلی) دودایره ، روی خط المرکزین O_1O_2 به هم می‌رسند (تصویر ۳۵) **و یا موازیند .** O_1O_2 محور تقارن شکلی است که از دو دایره تشکیل شده است.



تصویر ۳۵

در تقارن نسبت به O_1O_2 خط m که یك نقطهٔ مشترك با هر یك ازدودایره دارد به خط n تبدیل می‌شود که آنهم بایستی یك نقطهٔ مشترك با هر یك از دو دایره داشته باشد . یعنی مماس مشترك m درتقارن نسبت به O_1O_2 به مماس مشترك n تبدیل می‌شود و از آنجا قضیه ثابت خواهد بود (قضیهٔ ۴ شمارهٔ ۶) .

نمونه‌های دیگر مورد استعمال محور تقارن را در

مسائل زیر ذکر کرده‌ایم :

مسائل و تمرینات :

۳۶ ـ ثابت‌کنید اقطار لوزی محورهای تقارن آن هستند .

۳۷ ـ چه خواصی از لوزی با کمك محورهای تقارن آن به دست می‌آیند .

۳۸ ـ ثابت کنید که ذوزنقه تنها در صورتی دارای محور تقارن است که متساوی الساقین باشد .

۳۹ـ چه خواصی‌ازذوزنقهٔ متساوی‌الساقین‌رامی‌توان با کمك محور تقارن آن به دست آورد ؟

۴۰ ـ قضایای دیگری‌ازهندسهٔ مقدماتی را نام ببرید که بتوان آنها را به طریق جدید و با کمك محور تقارن اثبات کرد .

۴۱ ـ روی اضلاع زاویهٔ **ABC** دوپاره خط مساوی **BK** و **BL** را جدا کنید ، نقاط **K** و **L** را به نقطهٔ دلخواه **M** از نیمساز زاویه وصل کنید . ثابت کنید پاره خطهای **MK** و **ML** نسبت به خط **BM** قرینه‌اند .

۴۲ ـ نقطهٔ دلخواه Q از نیمساز PQ زاویهٔ MPN را به نقاط M و N از اضلاع زاویه وصل کرده‌ایم به طوریکه PM=PN شده است . ثابت کنید : a) پاره خطهای QM و QN با نیمساز PQ زوایای مساوی می‌سازند . b) پاره خطهای QM و QN زوایای مساوی با اضلاع PM و PN می‌سازند . c) پاره خطهای QM و QN برابرند .

۴۳ ـ روی ساقهای AB و BC از مثلث متساوی ـ الساقین ABC پاره خطهای مساوی AM و CN را جدا کنید و ثابث کنید که : a) پاره خطهای CM و AN مساوی‌اند . b) نقطهٔ تقاطع خطوط CM و AN بر نیمساز BD از مثلث واقع است .

۴۴ـ روی اضلاع زاویهٔ ABC پاره خطهای مساوی BK=BL را جدا کرده‌ایم . از نقاط K و L عمودهای KQ و LQ را بر اضلاع زاویه اخراج کرده‌ایم . ثابت کنید : a) نقطهٔ Q محل تلاقی عمودها بر نیمساز زاویه واقع است . b) پاره خطهای QK و QL با هم برابرند .

c) خطوط KQ و LQ اضلاع BL و BK از زاویهٔ ABC را در نقاط M و N قطع می‌کنند به طوریکه از رأس B به یك فاصله‌اند.

۴۵ـ a) ثابت کنید که عمودمنصف قاعدهٔ AB از ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین ABCD از وسط قاعدهٔ CD نیز می‌گذرد. b) ثابت کنید خطی که اوساط دو قاعدهٔ یك ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین را به هم وصل می‌کند برهر دوقاعده عمود است و برعکس، اگر خطی که اوساط دوقاعدهٔ ذوزنقه را به هم وصل می‌کند بر دو قاعده عمود باشد، آن ذوزنقه متساوی‌الساقین است.

۴۶ـ a) خط l یکی از دو دایرهٔ متحدالمرکز F و G را در A و B ودیگری را در C و D قطع کرده است. ثابت کنید: $AC=BD$ ‧ b) دایرهٔ S یکی از دو دایرهٔ متحدالمرکز F و G را در A و B و دیگری را در C و D قطع کرده است ثابت کنید: $AC=BD$.

۴۷ـ a) ثابت کنید خطی‌که اوساط دوقاعدهٔ ذوزنقهٔ متساوی‌الساقینی را به هم وصل می‌کند ازمحل تلاقی دو قطر

و همچنین از محل تلاقی دوساق ذوزنقه عبور می‌کند . b) ثابت‌کنید خطی که محل تلاقی اقطار ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین را به محل تلاقی ساقهای آن وصل می‌کند عمود منصف دو قاعدهٔ ذوزنقه است .

۴۸ـ روی ضلع BA از زاویهٔ ABC پاره خطهای BM و BN را جدا کرده‌ایم و روی ضلع دیگر BC پاره خطهای مساوی آنها BP=BM و BQ=BN را . ثابت کنید: a) پاره‌خطهای MQ و NP برابرند. b) پاره‌خطهای PN و QM یکدیگر را روی نیمساز زاویه قطع می‌کنند.

۴۹ـ از نقاط A و B دوانتهای قاعدهٔ بزرگتر ذوزنقهٔ ABCD خطوط AT و BT را چنان رسم کرده‌ایم که زاویهٔ TAB مساوی زاویهٔ TBA باشد . T نقطهٔ تلاقی این دوخط را به E نقطهٔ تلاقی اقطار ذوزنقه وصل کرده‌ایم ثابت کنید : a) خط ET از نقطهٔ F محل تلاقی ساقهای ذوزنقه عبور می‌کند . b) خط TE دو قاعدهٔ ذوزنقه را نصف می‌کند . c) خط ET عمود بر دوقاعده ذوزنقه است .

۵۰ـ M و N نقاط تلاقی دو دایره را به نقطهٔ دلخواه

Q از خط‌المرکزین O_1O_2 وصل کرده‌ایم ، ثابت کنید : a) پاره‌خطهای QM و QN برابرند . b) پاره‌خطهای مساوی QM و QN با خط O_1O_2 زوایای مساوی می‌سازد.

۵۱ــ روی مماسهای MA و MB که از نقطهٔ M بر دایره‌ای رسم شده‌اند پاره خطهای مساوی MK و ML را جدا می‌کنیم ، ثابت کنید : a) نقاط K و L از مرکز O به‌یك فاصله‌اند. b) زوایای ALO و BKO (A و B نقاط تماس‌اند) برابرند. c) سه خط AL و BK و MO متقاربند .

۵۲ــ دو دایره یکدیگر را در نقاط A و B قطع کرده‌اند ، ثابت کنید زاویهٔ بین مماسهایی که از A بر دو دایره رسم می‌شود برابر است با زاویهٔ بین مماسهایی که از B بر دو دایره رسم می‌شود .

۵۳ــ a) در چه حالتی مماسهای مشترك خارجی دو دایره با هم موازیند ؟ b) آیا مماسهای‌مشترك داخلی دو دایره می‌توانند موازی باشند ؟

۵۴ــ خط t در نقطهٔ A بردایره‌ای مماس است . از

نقطهٔ A دو پاره خط مساوی AB و AC را روی t جدا کنید و از B و C مماسهای BD و CE را (غیر از t) بر دایره رسم کنید. ثابت کنید: a) زوایای ABD و ACE برابرند. b) خطوط DE و t متوازیند (D و E نقاط واقع بر دایره‌اند). c) پاره خطهای BD و CE برابرند.

d) پاره خطهای BE و CD برابرند.

۵۵ ــ دایرهٔ S یکی از دو دیرهٔ متحدالمرکز S_1 و S_2 را در A و B و دیگری را در C و D قطع کرده است ثابت کنید: $AC=BD$ و $AB \parallel DC$

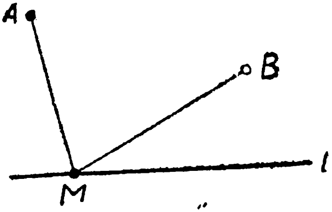
۵۶ ــ از نقطهٔ Q واقع بر خط المرکزین O_1O_2 از دو دایرهٔ S_1 و S_2 مماسهای QA و QB را بر دایرهٔ S_1 و مماسهای QC و QD را بر S_2 رسم کرده‌ایم (A و B و C و D نقاط تماس‌اند). ثابت کنید خطوط AC و BD؛ AD و BC یا موازیند و یا روی O_1O_2 یکدیگر راقطع می‌کنند.

۱۰ ــ حل مسایل با کمك تقارن محوری:

در قسمتهای گذشته برای به‌کار بردن محور تقارن هر بار از یك شکل هندسی متقارن استفاده می‌کردیم (پاره

خط ، زاویه ، مثلث متساوی الساقین ، دایره و غیره) ولی محور تقارن برای حل بسیاری از مسائلی هم که مربوط به اشکال متقارن نیستند به‌کار می‌رود، در این حالت تنها محور تقارن نه برای تمام شکل ، بلکه برای جزئی از آن می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد . برای این منظور مسئله را روی شکل جدیدی مطرح می‌کنیم که برای حل ساده تر از شکل اصلی باشد . دو نمونه ذکر کنیم :

مسئلهٔ۱ـ خط l و دو نقطهٔ A و B در یکطرف آن داده شده، روی خط l نقطه‌ای مانند M چنان پیدا کنید که مجموع MA+MB کوچکترین مقدار ممکن باشد (تصویر ۳۶) .

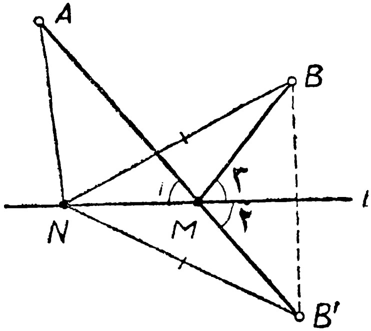


تصویر ۳۶

این مسئله را می‌توان به صورت زیر بیان کرد :

عده‌ای توریست چادر خود را در نقطهٔ A نزدیک ساحل رودخانهٔ l بر پا داشته‌اند و در نقطهٔ دیگر B آتش روشن

کرده‌اند، یکی از توریستها سطلی از چادر برداشته ومیخواهد آنرا از آب رودخانه پرکند و کنار آتش ببرد. ساحل رودخانه مستقیم و سرتاسر آن بدون مانع است. کدام راه را بایستی انتخاب کند تا کوتاه ترین راه ممکن باشد؟



تصویر ۳۷

حل ـ B' قرینهٔ $\mathbf{B}$ را نسبت به $\mathbf{l}$ در نظر می‌گیریم (تصویر ۳۷) . برای هر نقطه‌ای مانند $\mathbf{N}$ از خط $\mathbf{l}$ داریم: $NB=NB'$ (قضیهٔ ۲ شمارهٔ ۶) و بنابراین:

$$AN+NB=AN+NB'$$

یعنی مجموع $AN+NB$ برابر با خط شکستهٔ ANB' است. بنابراین کوتاه‌ترین راه برای $AN+NB$ موقعی است که خط شکستهٔ ANB' کمترین طول را داشته باشد. اما این حالت وقتی اتفاق می‌افتد که ANB' تبدیل

به پاره خطی از یك خط راست بشود یعنی در حالیکه نقش N را نقطهٔ M ، محل تلاقی AB′ با l ، بازی کند . همین نقطهٔ M نقطهٔ مورد جستجوی ما است .

توضیحـ از حل مسئله روشن شدکه نقطهٔ مطلوب M روی خطی است که از A به B′ وصل شود و بنابراین: $\hat{۳}=\hat{۲}=\hat{۱}$ ، به عبارت دیگر کمترین راه ANB وقتی است که زاویه تابش $\widehat{(۱)}$ برابر با زاویهٔ انعکاس $\widehat{(۲)}$ باشد .

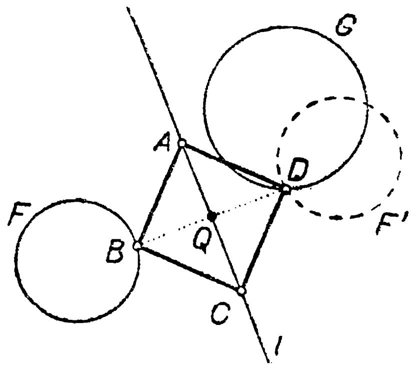
می‌دانیم که مسیر شعاع نور هم وقتی که به آینه می‌تابد طبق همین شرط انجام می‌گیرد واین به معنای آنست که نور برای اینکه ازمنبع A به آینهٔ l تابیده و به نقطهٔ B برسد کوتاه‌ترین راه را انتخاب می‌کند . این حقیقت حالت خاصی از اصل عمومی فرما (Ferma)[1] در مورد نوراست که می‌گوید : نورهمیشه (در انعکاس ، در موقع شکست و وغیره) از تمام راههای ممکنه آنرا انتخاب می‌کند که حداقل زمان را برای عبور لازم داشته باشد .

---

۱) فرما ریاضی دان مشهور فرانسوی در قرن هفدهم .

مسئلهٔ۲ـ مربعی رسم کنید که دو رأس رو بروی آن روی خط l و دو رأس متقابل دیگر آن روی دو دایرهٔ مفروض باشد.

حل[۱] ـ ۱ تحلیل : فرض می‌کنیم مسئله حل شده و ABCD مربع مطلوب باشد رئوس A و C از این مربع روی خط l ، رأس B روی دایرهٔ F و رأس D روی دایرهٔ G واقع باشد (تصویر ۳۸) .



تصویر ۳۸

از آنجا کــه اقطار مربع عمود منصف یکدیگرند

۱) حل هر مسئله مربوط به ترسیمات هندسی شامل چهار مرحله است : تحلیل ، رسم ، اثبات و بحث .

نقاط B و D قرینهٔ یکدیگر نسبت به AC (یا نسبت به l) خواهند بود . چون نقطهٔ B روی دایرهٔ F واقع است قرینهٔ آن D باید روی دایرهٔ 'F قرینهٔ F نسبت به l واقع باشد . از طرف دیگر نقطهٔ D روی دایرهٔ G قرار دارد و بنابراین D محل تلاقی دو دایرهٔ 'F و G خواهد بود .

۲ــ رسم: دایرهٔ 'F قرینهٔ F نسبت به l را رسم می‌ــ کنیم (مسئلهٔ ۵ شمارهٔ ۷) فرض‌کنیم D محل تلاقی 'F با G باشد . قرینهٔ D را نسبت به l نقطهٔ B و محل تلاقی BD را با l نقطهٔ Q می‌نامیم . سپس روی خط l و در دو طرف نقطهٔ Q پاره خطهای QA و QC را مساوی پاره خط QD جدا می‌کنیم ، ABCD که بدین ترتیب به دست می‌آید مربع مطلوب است .

۳ــ اثبات : چهار ضلعی ABCD مربع است زیرا اقطار آن با هم مساوی و عمود منصف یکدیگرند . نقاط A و C طبق ترسیم روی خط l و نقطهٔ D روی دایرهٔ G واقع است و بالاخره چون نقطهٔ D روی دایرهٔ 'F واقع است قرینهٔ آن B روی قرینهٔ 'F نسبت به l یعنی روی دایرهٔ

F واقع خواهد بود .

۴ ـ بحث : دو دایرهٔ F' و G می‌توانند در دو نقطه یکدیگر را قطع کنند، بر هم مماس باشند و یا اصلاً نقطهٔ مشترکی نداشته باشند و بنابراین مسئله ممکن است دارای دوجواب ، یك جواب و یا بدون جواب باشد . حالتی هم وجود دارد که دو دایرهٔ F' و G بر هم منطبق شوند (و این درحالتی است که F و G نسبت به l قرینهٔ یکدیگر باشند) و در این حالت مسئله دارای بی نهایت جواب خواهد بود.

مسائل و تمرینات

۵۷ـ خط l ودو نقطهٔ A و B دریك طرف آن مفروض‌اند ، نقطهٔ Q را روی خط l چنان پیدا کنید که خطوط AQ و BQ با l زوایای متساوی بسازند .

۵۸ ـ خط l و دو نقطهٔ A و B در دو طرف آن روی صفحه داده شده ، نقطه‌ای مانند M روی l چنان پیدا کنید که تفاضل MA و MB بیشترین مقدار ممکن باشد .

۵۹ـ زاویهٔ ABC و خط l روی یك صفحه داده شده مربعی رسم کنید که دورأس روبروی آن روی خط l ودورأس

دیگرش روی اضلاع زاویه قرار گرفته باشد .

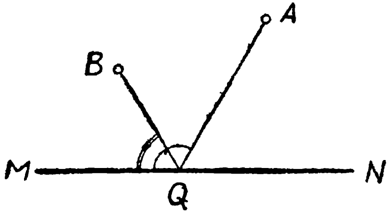
۶۰ ـ خط l و دو دایرهٔ F_1 و F_2 در یك طرف آن مفروض‌اند . روی خط l نقطه‌ای مانند Q چنان پیدا کنید که مماسهای QA و QB که از Q بر دو دایرهٔ F_1 و F_2 رسم شده است با l زوایای مساوی بسازد .

۶۱ـ a)خط MN ودو نقطهٔ Aو B در یك طرف آن داده شده ، روی MN نقطه‌ای مانند Q چنان پیدا کنیدکه داشته باشیم : $\widehat{AQM} = 2\widehat{BQM}$ (تصویر ۳۹) .

b) خط MN و دو نقطهٔ Aو B در یك طرف آن مفروض است ، نقطهٔ Q را روی MN چنان پیدا کنید که داشته باشیم : $\widehat{AQM} = 2\widehat{BQN}$ (تصویر ۴۰).

۶۲ـ ازچهار ضلعی ABCD، طول هر یك از اضلاع داده شده ومی‌دانیم قطر AC نیمساز زاویهٔ A است ، چهار ضلعی را رسم کنید .

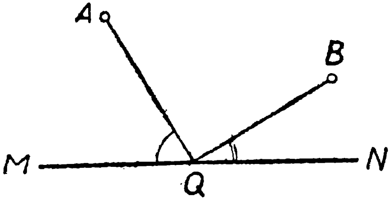
۶۳ ـ ثابت کنیدکه قرینهٔ H ، محل تلاقی ارتفاعات مثلث ABC ، نسبت به هر یك از سه ضلع آن روی دایرهٔ



تصویر ۳۹

محیطی مثلث قرار دارند .

۶۴ـ ثابت کنید که قرینه‌های دایرهٔ محیطی مثلث نسبت به سه ضلع آن سه دایره خواهد بود که در نقطهٔ **H** محل تلاقی ارتفاعات یکدیگر را قطع می‌کنند .



تصویر ٤٠

۶۵ـ سه خط متقارب **l** و **m** و **n** ونقطهٔ **A** واقع بر **l** مفروض است. مثلث **ABC** را چنان رسم کنید که **l** و **m** و **n** نیمسازهای زوایای آن باشند .

۶۶ـ دایرهٔ **S** وسه خط **l** و **m** و **n** متقارب درمرکز دایره مفروض‌اند ، مثلث **ABC** را بر دایرهٔ **S** چنان محیط کنید که سه رأس آن بر سه خط مفروض واقع باشد .

۶۷ـ سه خط متقارب l و m و n و نقطهٔ P واقع بر l مفروض است . مثلث ABC را چنان رسم کنید که خطوط l و m و n عمودمنصفهای مثلث بوده وضمناً AB از نقطهٔ P عبور کند .

۶۸ ـ ثابت کنید که از بین مثلثهای با قاعده و ارتفاع مفروض ، می نیمم محیط مربوط به مثلث متساوی ـ الساقین است .

۶۹ـ خط l ودو نقطهٔ P و Q دریك طرف آن مفروض است . روی خط l نقطه‌ای مانند R چنان پیدا کنید که محیط مثلث PQR کمترین مقدار ممکن باشد .

۷۰ ـ زاویهٔ ABC و در داخل آن نقطهٔ P مفروض است . مثلث PQR را با حداقل ممکنهٔ محیط چنان بسازید که یك رأس آن بر P و دو رأس دیگرش بر دو ضلع زاویه قرار گیرد .

۷۱ ـ در داخل مثلث حادة الزاویهٔ ABC مثلثی با حداقل ممکنهٔ محیط محاط کنید .

۷۲ ـ دو خط a و b را عمود بر هم و نقطهٔ M را در

صفحهٔ این دو خط و خارج آنها فرض می‌کنیم ، M_1 را قرینهٔ M نسبت به a و M_2 را قرینهٔ M_1 نسبت به b و M_3 را قرینهٔ M_2 نسبت به a و M_4 را قرینهٔ M_3 نسبت به b فرض می‌کنیم . ثابت کنید M و M_4 بر هم منطبق‌اند .

۷۳ ـ ثابت کنید که اگر شکلی دارای دو محور تقارن l و l_1 باشد ، خط l_2 قرینهٔ l نسبت به l_1 نیز محور تقارن شکل خواهد بود .

۷۴ ـ ثابت کنید که اگر شکلی تنها دو محور تقارن داشته باشد ، این دو محور بر هم عمود خواهند بود .

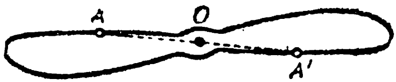
۷۵ ـ ثابت کنید که اگر شکلی دارای تعداد محدودی محور تقارن باشد ، این محور تقارنها متقارب خواهند بود و هر دو محور تقارنی که مجاور یکدیگرند با هم زاویهٔ ثابتی می‌سازند .

۲

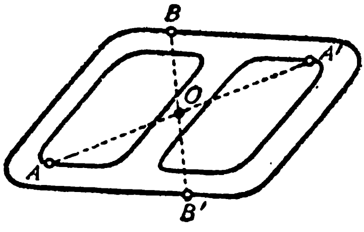
تقارن مرکزی

۱۱ـ تعریف تقارن مرکزی

تصاویر ۴۱ و ۴۲ دارای محور تقارن نیستند ولی آنها هم به تعبیری « منظم » و « متقارن » هستند . روی هر یك از این تصاویر نقطه‌ای مانند O وجود دارد به طوری که هر نقطهٔ A از شکل با نقطهٔ دیگری مانند A' از شکل تطبیق می‌کند که نسبت به A در طرف دیگر O قرار گرفته است . (تصاویر ۴۱ و ۴۲).



تصویر ٤١



تصویر ٤٢

در این حالت گویند که شکل از دو قسمت تشکیل شده است که **نسبت به نقطهٔ O متقارن** می‌باشند .

اشکالی را که نسبت به نقطه‌ای مانند O متقارن هستند با دقت تعریف کنیم :

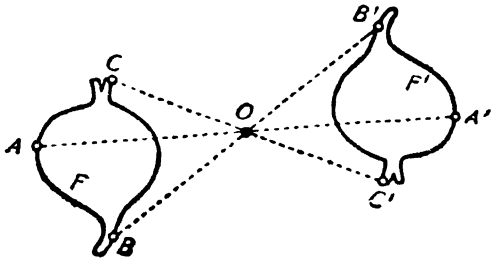
تعریف ـ نقاط A و 'A را نسبت به نقطهٔ O متقارن گویند به‌شرطی که پاره خط 'AA از نقطهٔ O عبور کند و به‌وسیلهٔ این نقطه به دو قسمت مساوی تقسیم شود (تصویر ۴۳) نقطهٔ O را **مرکز تقارن** نقاط A و 'A گویند .

تصویر ۴۳

نقطهٔ O را روی صفحه انتخاب می‌کنیم. برای هر نقطهٔ A تنها یك نقطه مانند 'A وجود خواهد داشت که قرینهٔ A نسبت به O باشد، برای پیدا کردن نقطهٔ 'A بایستی از A به O وصل کرد و روی امتداد آن پاره خط $OA'=OA$ را جدا کرد . دراین صورت قرینهٔ نقطهٔ O برخودش منطبق خواهد شد . اگر نقطهٔ 'A قرینهٔ A نسبت بـه O باشد ، A هم قرینهٔ 'A نسبت به O خواهد بود .

اکنون فرض می‌کنیم نقطه‌ای مانند O و شکل غیر مشخصی مانند F درصفحه انتخاب شده باشد. نقطهٔ دلخواهی

مانند A از شکل F را در نظر گرفته و قرینهٔ آن 'A را نسبت به نقطهٔ O پیدا می‌کنیم (تصویر ۴۴) سپس نقطهٔ B از شکل F را انتخاب کرده و 'B قرینهٔ آن را نسبت‌به



تصویر ٤٤

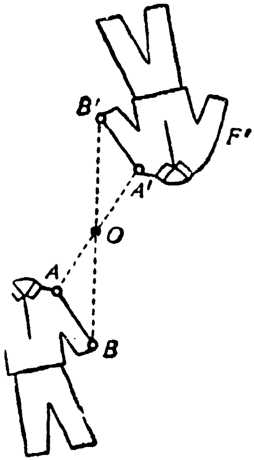
O پیدا می‌کنیم و غیره . نقاط بیشمار 'A و 'B و 'C و . . . که قرینه‌های نقاط A و B و C و . . . از شکل F نسبت‌به O می‌باشند، خود شکل جدیدی مانند 'F می‌سازند(تصویر ۴۴) ، **شکل 'F را قرینهٔ شکل F نسبت به نقطهٔ O گویند.**و همچنین‌می‌توان گفت‌که **دوشکل F و 'F نسبت به نقطهٔ O متقارن‌اند .**

به این ترتیب تعریف زیر را به‌دست می‌آوریم.

تعریف ــ شکل 'F که‌تمام نقاط آن قرینه‌های

نقاط شکل F نسبت به نقطهٔ O می‌باشند قرینهٔ شکل F نسبت به O نامیده می‌شود.

دو نمونه از اشکالی که نسبت به هم متقارن‌اند در تصاویر ۴۵و۴۶ داده شده است .

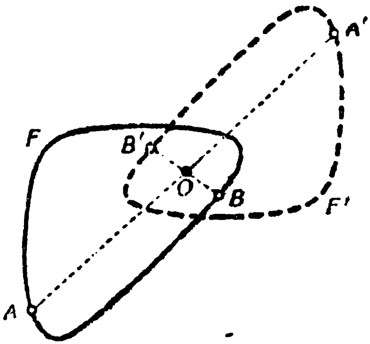


برای هر شکلی مانند F شکلی مانند F′ وجود دارد که قرینهٔ F نسبت به O باشد . پیدا کردن شکل F′ ، قرینهٔ F نسبت به O را **قرینه نسبت به‌نقطهٔ O و یا تقارن مرکزی** گویند .

تصویر ۴۵

۱۲ـ اشکالی که دارای مرکز تقارن‌اند.

تقارن مرکزی ، هر شکل F را به‌شکل دیگری مانند F′ تبدیل می‌کند . برعکس در تقارن مرکزی شکل



تصویر ۴۶

F' هم به‌شکل F تبدیل می‌شود : **در تقارن مرکزی جای اشکال F و F' با یکدیگر عوض می‌شود .**

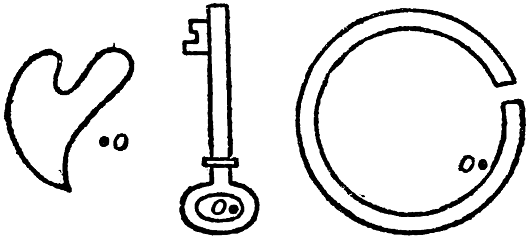
اکنون اگر دو شکل F و F' را به عنوان یك شکل در نظر بگیریم ، در نتیجهٔ تقارن مرکزی هر قسمت این شکل بر قسمت دیگر آن قرار می‌گیرد و در نتیجه «مجموعهٔ» شکل بر خودش منطبق می‌شود . هریك از اشکال تصاویر ۴۱ و ۴۲ دارای چنین خاصیتی هستند (که می‌توان تصور کرد هریك از آنها از دو قسمت بالا و پایین تشکیل شده است) : اگر نقطه‌ای مانند A از این تصاویر انتخاب شود، قرینهٔ آن نسبت به O نیز برخود تصویر قرار خواهد گرفت .

اشکالی را که دارای این خاصیت باشند **متقارن مرکزی** گویند . به‌عبارت دیگر گویند که شکل F **نسبت به نقطهٔ O متقارن است** (یا متقارن مرکزی است) ، **به شرطی که قرینهٔ آن نسبت به نقطهٔ O بر خودش منطبق شود** (یعنی قرینهٔ F نسبت به O برخود F واقع شود) . در حالتی که شکل F نسبت به نقطهٔ O متقارن باشد ، O را

مرکز تقارن شکل F گویند .

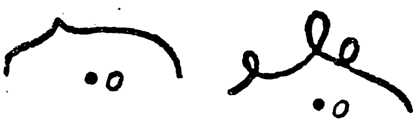
مسائل و تمرینات

۷۶ ــ اشکال تصویر ۴۷ را روی کاغذ رسم کنید و قرینهٔ مرکزی هریك را نسبت به نقطهٔ O پیدا کنید .



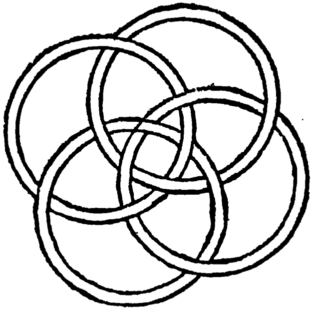
تصویر ۴۷

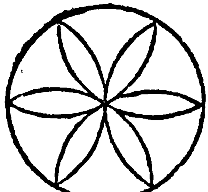
۷۷ ــ در تصویر ۴۸ «نیم بالایی» از دو شکل‌متقارن داده شده ، شکل‌ها را تکمیل کنید .



تصویر ۴۸

۸۷ ــ مرکز تقارن را در اشکال تصویر ۴۹ پیدا کنید .





b)

تصویر ۴۹

۷۹ ـ کدامیك از ارقام تصویر ۵۰ متقارن مرکزی هستند ؟ چند عدد بنویسید که دارای مرکز تقارن باشند .

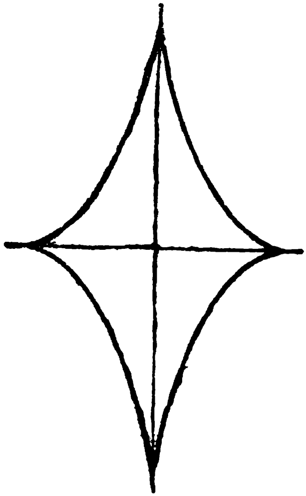
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

تصویر ۵۰

۸۰ ـ ثابت کنید که اگر شکلی دارای دو محور تقارن عمود بر هم باشد (تصویر ۵۱) دارای مرکز تقارن نیز خواهد بود .

۸۱ ـ ثابت کنید که اگر شکلی دارای محور تقارن l و مرکز تقارن O واقع بر l باشد ، خطی که از O بر l عمود اخراج شود نیز محور تقارن شکل خواهد بود .

۸۲ـ آیا همیشه محل تلاقی دو محور تقارن ، بایستی



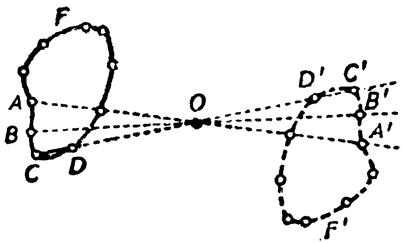
تصویر ۵۱

مرکز تقارن شکل باشد ؟

۳ ـ آزمایش

وسایل لازم : خط کش و پرگار .

ساختن شکلی که قرینهٔ شکل مفروض نسبت به نقطهٔ O باشد با کمك خط کش و پرگار ـ روی صفحهٔ کاغذ نقطه‌ای مانند O انتخاب کنید ، سپس شکل دلخواهی (مثل شکل F از تصویر ۵۲) روی کاغذ رسم نمایید .روی



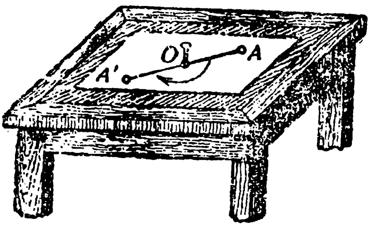
تصویر ۵۲

محیط شکل F یك ردیف نقطهٔ نزدیك به‌هم انتخاب کنید و

قرینهٔ مرکزی هریك از این نقاط را نسبت به نقطهٔ O پیدا کنید (برای این منظور نقطه را به O وصل کرده و روی امتداد آن به همان اندازهٔ فاصلهٔ نقطه تا O جدا کنید). با وصل نقاط به دست آمده به یکدیگر شکل F' که قرینهٔ F نسبت به نقطهٔ O است به دست خواهد آمد .

۱۴ ـ تقارن مرکزی به عنوان نتیجهٔ دوران

نقاطی را که در تقارن مرکزی نسبت به نقطهٔ O به‌دست می‌آیند به‌ترتیب زیرهم‌می‌توان به‌دست‌آورد: نقطه‌ای مانند O روی صفحهٔ کاغذ انتخاب می‌کنیم و صفحهٔ کاغذ را در نقطهٔ O به وسیلهٔ یك سنجاق به میز محکم



تصویر ۵۳

می‌کنیم (تصویر ۵۳) . حالا بدون آنکه سنجاق را برداریم صفحهٔ کاغذ را روی سطح میز به‌اندازهٔ ۱۸۰ درجه دوران می‌دهیم دراین صورت هر نقطهٔ A در اثر این دوران به‌نقطهٔ دیگری‌مانند A' تبدیل می‌شود که‌درطرف‌دیگر Oواقع‌شده

و دارای همان فاصلهٔ A تا O می‌باشد ، به عبارت دیگر ضمن این دوران هر نقطهٔ A به نقطهٔ 'A که قرینهٔ مرکزی A نسبت به نقطهٔ O است تبدیل می‌شود . بنابر این اگر Aو'A نسبت به نقطهٔ O قرینهٔ یکدیگر باشند در نتیجهٔ دوران جایشان را با یکدیگر عوض می‌کنند: هریك‌ازآنها در وضعی قرار می‌گیرد که دیگری قبل از دوران در آن وضع قرار داشت .

وضع در بارهٔ اشکال هم به‌همین ترتیب است : اگر Fو'F دو شکل قرینهٔ یکدیگر نسبت به نقطهٔ O باشند ، در نتیجهٔ دوران مذکور درفوق هریك از این‌دو شکل جای خود را به دیگری می‌دهد . حالا اگر فرض کنیم که شکل 'F ثابت باشد (مثلاً اگر صفحهٔ کاغذ بریده وبر میزمحکم شده باشد) در آنصورت بایك دوران ۱۸۰ درجه حول نقطهٔ O شکل F بر 'F منطبق خواهد شد .

۱۵ ـ آزمایش

مواد و وسایل‌لازم: شکلی‌که در آزمایش شمارهٔ ۱۳ به دست‌آوردیم ، کاغذ کالك و سنجاق .

آزمایش اشکال متقارن باکمك‌دوران ـ کاغذ

کالك را روی تصویری که دراختیار دارید بگذارید (اشکال F و F′ که قرینهٔ یکدیگر نسبت به O هستند) . تصویر وکاغذ کالك را روی نقطهٔ O باسنجاق به‌هم وصل کنید، سپس شکل F را روی کالك رسم کنید . اکنون تصویر را ثابت نگاه دارید وکاغذ کالك را به اندازهٔ ۱۸۰ درجه دوران دهید ، خواهید دید شکلی که روی کاغذ کالك رسم کرده‌اید بر F′ واقع خواهد شد .

۱۶ ـ خواص تقارن مرکزی

با توجه به آنچه که گفته شد صحت قضایای زیرروشن می‌شود :

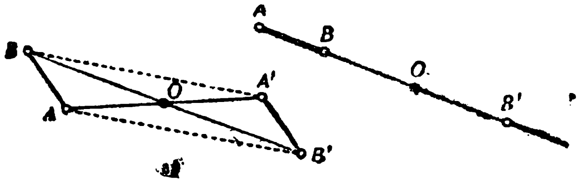
قضیهٔ ۱ـ اشکالی که نسبت به نقطهٔ O متقارن باشند با هم برابرند .

درحقیقت باتوجه‌به‌اینکه هرشکلی پس‌از یك‌دوران ۱۸۰ درجه دور نقطهٔ O برقرینهٔ خودش منطبق می‌شودواضح است که با هم مساوی خواهند بود.

قضیهٔ ۲ـ قرینهٔ پاره خط AB نسبت به O پاره خطی‌مثل A′B′ خواهد بود که مساوی‌با آن بوده‌و در آن نقاط A′ و B′ قرینهٔ نقاط A و B نسبت به O می‌باشند. قرینهٔ هر پاره خط یا با آن موازی است

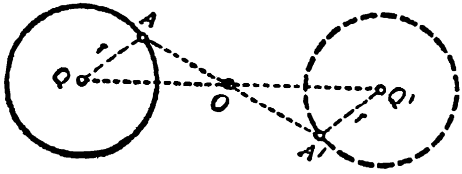
(تصویر ۵۴ ـ a) **و یا با خط روی خط راستی قرار گرفته‌اند که از O می‌گذرد** (تصویر ۵۴ ـ b) .

قسمت اول قضیهٔ ۲ مستقیماً ازقضیهٔ ۱ نتیجه می‌شود، توازی پاره خط AB و A'B' (درحالتی که خط AB از O عبور نمی‌کند) از اینجا نتیجه می‌شود که پاره خطهای AA' و BB' در نقطهٔ O یکدیگر را نصف کرده‌اند و بنابراین چهار ضلعی A B A'B' متوازی الاضلاع است . در حالتی هم که خط AB از O عبور کند واضح است که طبق تعریف تقارن مرکزی دونقطه A' و B' هم روی امتداد AB واقع خواهند بود .



تصویر ۵٤

قضیهٔ۳ـ قرینهٔ دایرهٔ به‌مرکزQو به‌شعاع r نسبت به نقطهٔ O دایرهٔ دیگری است که مرکز آن Q' قرینهٔ Q نسبت به O وشعاعش برابر با r می‌باشد (تصویر۵۵) .

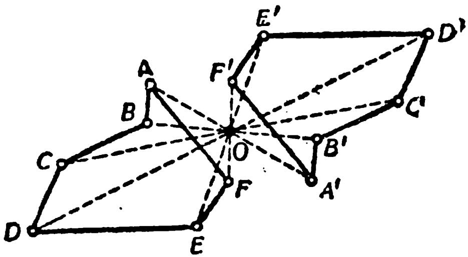


تصویر ۵۵

Q' را قرینهٔ Q و A' را قرینه نسبت A به O فرض‌می‌کنیم طبق قضیهٔ ۲ داریم :

$$QA = Q'A' = r$$

باکمك قضایای ۲ و ۳ می‌توان قرینهٔ مرکزی هر ـ شکل مفروض را به دست آورد . بدست‌آوردن A' قرینهٔ A نسبت به O را می‌توان به سادگی انجام داد (تصویر ۴۳) ، برای بدست آوردن چند ضلعی F' قرینهٔ چند ضلعی F



تصویر ۵۶

نسبت به O کافی است که قرینهٔ رئوس F را نسبت به O

پیدا کنیم و سپس آنها را به هم وصل نماییم (تصویر ۵۶)، قضیهٔ ۳ هم راه بدست آوردن قرینه یك دایره را نسبت به نقطهٔ O نشان می‌دهد (تصویر ۵۵) .

مسائل و تمرینات

۸۳ ــ کدام نقاط در تقارن نسبت به نقطهٔ O برخودشان منطبق می‌شوند ؟ کدام خطوط در تقارن نسبت به نقطهٔ O بر خودشان منطبق می‌شوند ؟

۸۴ ــ a) ثابت کنید که هر دو پاره خط مساوی و موازی (یا منطبق بر یك خط) AB و A'B' را می‌توان نسبت به نقطه‌ای مانند O متقارن دانست .

b) فرض کنید پاره خطهای AB و CD مساوی و موازی باشند ، آیا همیشه نقطه‌ای مانند O وجود دارد که C قرینهٔ A نسبت به O و D قرینهٔ B نسبت به O باشد ؟

۸۵ ــ ثابت کنید که هر دو دایرهٔ مساوی نسبت به وسط پاره خطی که دو مرکز را به هم وصل می‌کند متقارن اند .

۸۶ ــ ثابت کنید که هر دو دایرهٔ مساوی و مماس

خارج نسبت به نقطهٔ تماس دو دایره متقارن‌اند .

۸۷ ــ ثابت کنید که هر دوخط موازی نسبت به‌نقطهٔ دلخواهی که به یك فاصله از دو خط باشد متقارن‌اند .

۸۸ ــ شکلی که از دو خط متقاطع تشکیل شده است چند مرکز تقارن دارد ؟ شکلی که ازدو خط موازی تشکیل شده است چند مرکز تقارن دارد ؟

۸۹ــ مثلث‌های ABC و $A'B'C'$ نسبت به نقطهٔ O متقارن‌اند . ثابت کنید نقاط M و M' محل تلاقی میانه ــ های دو مثلث هم نسبت به O متقارن‌اند .

۹۰ ــ D وE وF را اوساط اضلاع‌مثلث A BC و M را محل تلاقی میانه‌های آن فرض می‌کنیم . اگر P و Qو R اوساط پاره خطهای MA وMB وMC باشد : ثابت کنید دومثلث DFE وPRQ برابر ند .

۹۱ ــ M را محل تلاقی میانه‌ها و D و E و F را اوساط پاره خطهای MA و MB وMC فرض می‌کنیم . از نقاط D و E و F خطوطی به‌موازات‌اضلاع BC وAC و AB مثلث رسم می‌کنیم ثابت کنید مثلثی که از تقاطع این

خطوط بدست می‌آید برابر است با مثلث ABC.

۹۲ ـ D و E و F را اوساط اضلاع AB و BC و AC از مثلث ABC و Q_1 و Q_2 را مراکز دوایر محاطی مثلثهای ADF و EDF فرض کنید. ثابت کنید پاره خط Q_2Q_1 از وسط پاره خط DF می‌گذرد.

۹۳ ـ کدامیك از اشکال زیر دارای مرکز تقارن هستند: مثلث متساوی الساقین، مثلث متساوی الاضلاع، پاره خط، نیم خط، خط، زاویه، دو زاویهٔ قائمه، باریکه‌ای که بین دوخط موازی قرار گرفته باشد، ذوزنقه، متوازی الاضلاع، شش ضلعی منتظم، n ضلعی منتظم.

کدامیك از این اشکال بیش از یك مرکز تقارن دارند؟

۹۴ ـ کدامیك از اشکال زیر دارای مرکز تقارن هستند: دایره، سطح دایره، قطاع دایره، قطعه دایره، دایره‌ای با دو وتر موازی، منطقه (قسمتی از دایره که بین دو وتر موازی واقع است)، حلقه (سطح واقع بین دو دایرهٔ متحد المرکز)، سطح واقع بین دو دایره با مرکزهای مختلف، سطحی که از تقاطع دو دایرهٔ متساوی

به دست می‌آید ؛ سطحی که از تقاطع دو دایرهٔ غیر مساوی به دست می‌آید .

۹۵ ـ ثابت کنید که هیچ مثلثی دارای مرکز تقارن نیست و سپس قضیه را تعمیم داده ثابت کنید که هر چند ضلعی که تعداد اضلاع آن فرد باشد نمی‌تواند مرکز تقارن داشته باشد .

۹۶ ـ مثلثهای ABC و A'B'C' که نسبت به نقطهٔ O متقارن‌اند ، یکدیگر را قطع کرده‌اند . تقاطع آنها چه وضعی خواهد داشت ؟

۹۷ ـ مثلث ABC مفروض است ، قرینهٔ آنرا پیدا کنید :

اولاً) نسبت به رأس A

ثانیاً) نسبت به نقطهٔ D وسط ضلع BC

ثالثاً)نسبت به نقطهٔ M محل تلاقی میانه‌های مثلث.

۹۸ ـ متوازی‌الاضلاع ABCD مفروض است ، قرینهٔ آنرا پیدا کنید :

اولاً) نسبت به رأس A

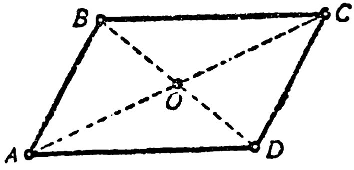
ثانیاً) نسبت به نقطهٔ E وسط AB

ثالثاً) نسبت به نقطهٔ M که ضلع AC را به نسبت $AM : MC = ۲:۱$ قطع می‌کنند .

۹۹ ـ دایرهٔ K ونقطهٔ A واقع در داخل آن مفروض است ، قرینهٔ K را نسبت به A پیدا کنید و سطح واقع بین دو دایره را هاشور بزنید .

۱۷ ـ مرکز تقارن متوازی الاضلاع

قضیه: متوازی‌الاضلاع یك شکل متقارن‌است. مرکز تقارن آن محل تلاقی اقطار آنست . (این نقطه را اغلب مرکز متوازی الاضلاع گویند) .



تصویر ۵۷

اثبات ـ ABCD را یك متوازی الاضلاع وO را محل تلاقی اقطار آن فرض کنید (تصویر ۵۷). ازآنجا که اقطارمتوازی الاضلاع منصف یکدیگرند، بنابراین A وC قرینهٔ یکدیگر نسبت به O می‌باشند و Bو D هم قرینهٔ یکدیگر نسبت به O هستند . از اینجا وبا توجه‌به قضیهٔ ۲ شمارهٔ ۱۶ می‌شود نتیجه‌گرفتAB و CD قرینهٔ یکدیگر وBC و AD نیزقرینهٔ یکدیگر نسبت به‌نقطهٔ

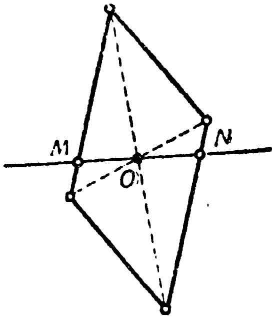
O هستند . بنابراین اگر متوازی الاضلاع را به اندازهٔ ۱۸۰ درجه دور نقطهٔ O دوران دهیم بر خودش منطبق می‌شود .

با توجه به مرکز تقارن متوازی الاضلاع می‌توان بسیاری از قضایای مربوط به آنرا به سادگی نتیجه گرفت . در اینجا چند نمونه ذکر می‌کنیم :

قضیهٔ ۱ ـ اضلاع روبرو در متوازی الاضلاع برابرند .

قضیهٔ ۲ ـ زوایای روبرو درمتوازی‌الاضلاع برابرند .

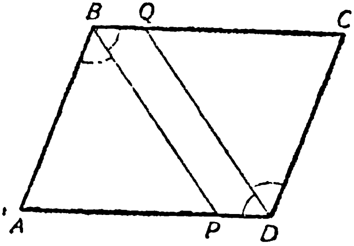
قضیهٔ ۳ ـ هر خط دلخواهی که از نقطهٔ O (نقطهٔ تلاقی دو قطر متوازی الاضلاع) عبور کند ، به وسیلهٔ دو ضلع روبرو پاره خطی به‌وجود می‌آورد که O وسط آن است،(تصویر ۵۸) .



تصویر ۵۸

قضیهٔ ۴ـ نیمسازهای دو زاویهٔ روبرو درمتوازی‌ـ الاضلاع متوازیند(تصویر ۵۹) **و یا برهم منطبق‌اند.**

قضایای ۱و۲ از اینجا ثابت می‌شوند که اضلاع روبرو



تصویر ۵۹

وهمچنین زوایای رو به رو در متوازی الاضلاع ، نسبت به نقطهٔ O قرینهٔ یکدیگرند (قضیهٔ ۱ شمارهٔ ۱۶ را ببینید) . در مورد قضیهٔ ۳ هم از تصویر ۵۸ به روشنی پیداست که نقاط M و N نسبت به نقطهٔ O قرینهٔ یکدیگرند . قضیهٔ ۴ از اینجا ناشی می‌شود که اگر متوازی الاضلاع را به اندازهٔ ۱۸۰ درجه دور نقطهٔ O دوران دهیم زاویهٔ ABC بر قرینهٔ خود زاویهٔ ADC منطبق می‌شود و در نتیجه BP نیمساز ABC هم پس از دوران بر DQ نیمساز ADC منطبق خواهد شد و این به معنای آن است که DQ قرینهٔ BP نسبت به O می‌باشد و بایستی با هم موازی و یا بر هم منطبق باشند (قضیهٔ ۲ شمارهٔ ۱۶ را ببینید) .

مثالهای زیاد دیگری از همین قبیل را می‌توان ذکر کرد و ما بسیاری از قضایای مربوط به متوازی الاضلاع را ضمن تمرینات زیر آورده‌ایم که بایستی با کمك تقارن

اثبات شوند .

مسائل و تمرینات

۱۰۰ ـ ثابت کنید که اگر یك چهار ضلعی دارای مرکز تقارن باشد ، متوازی الاضلاع است .

۱۰۱ ـ ثابت کنید که اگر یك شش ضلعی دارای مرکز تقارن باشد ، اضلاع روبرو در آن موازی ومساویند و بر عکس اگر در یك شش ضلعی اضلاع روبرو موازی و مساوی باشند ، شش ضلعی دارای مرکز تقارن خواهد بود .

۱۰۲ ـ ثابت کنید که یك n ضلعی تنها وقتی دارای مرکز تقارن است که تعداد اضلاع آن زوج بوده و اضلاع روبرویش دو به دو موازی و مساوی باشند .

۱۰۳ـ خط EF ازنقطهٔ O محل تلاقی اقطار متوازی‌ـ الاضلاع ABCD عبورکرده و دوضلع روبروی AB وCD از آنرا در نقاط E وF قطع کرده است . ثابت کنید :

$$AE=CF$$

۱۰۴ ـ روی اضلاع AB وCD از متوازی الاضلاع ABCD پاره خطهای MN=CN را جدا کرده‌ایم .

ثابت کنید خط NM ازمرکز متوازی‌الاضلاع عبور می‌کند.

۱۰۵ ـ خطوط MN و PQ که از مرکز متوازی‌ـ الاضلاع ABCD عبور کرده‌اند ، اضلاع روبروی این متوازی الاضلاع را در نقاط M و N ، P و Q قطع کرده‌ـ اند . ثابت کنید MP=NQ .

۱۰۶ ـ از نقطهٔ O محل تلاقی اقطارمتوازی الاضلاع ABCD چهار عمود OM و ON و OP و OQ را بر ۴ ضلع آن رسم کرده‌ایم . ثابت کنید چهار ضلعی MNPQ متوازی‌الاضلاع است .

۱۰۷ ـ روی اضلاع متوازی الاضلاع ABCD پاره خطهای‌مساوی AK=BL=CM=DN راجدا کرده‌ایم. ثابت کنید چهار ضلعی KLMN متوازی الاضلاع است و مرکزآن بر مرکزمتوازی الاضلاع ABCD منطبق است .

۱۰۸ـ روی‌اضلاع روبروی متوازی‌الاضلاع ABCD و درخارج آن‌مثلثهای متساوی ABE و CDF راساخته‌ایم (که‌درآن AE=CF و BE=DF). ثابت‌کنیدکه‌خط EF از نقطهٔ O محل تلاقی‌اقطارمتوازی‌الاضلاع‌عبور می‌کند و در

این نقطه نصف می‌شود .

۱۰۹ ـ Q_1 و Q_2 مراکز دوایر محیطی مثلث‌های ABC و CDA از متوازی الاضلاع ABCD می‌باشند. ثابت کنید پاره خطهای AC و BD و Q_1Q_2 متقاربند .

۱۱۰ ـ a) روی هر یك از اضلاع متوازی‌الاضلاع ABCD ودر خارج آن مثلثهای متساوی‌الاضلاع ساخته‌ایم. ثابت کنید رئوس سوم مثلثها خود تشکیل یك متوازی ـ الاضلاع می‌دهند .

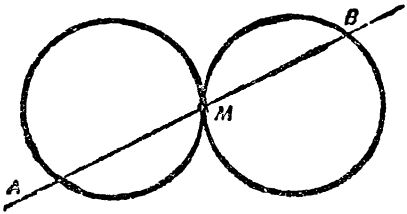
b) روی هر یك ازاضلاع متوازی‌الاضلاع ودر خارج آن مربعهایی ساخته‌ایم . ثابت کنید که از وصل مراکز این مربعها به یکدیگر متوازی الاضلاع جدیدی به دست خواهد آمد .

۱۸ ـ حل مسائل به‌کمك تقارن مرکزی

مرکز تقارن اجازه می‌دهد که بسیاری از خواص مربوط به اشکال را ثابت کنیم ، ما نمونهٔ این وضع را در بارهٔ متوازی الاضلاع دیدیم اکنون نمونهٔ دیگری را ذکر می‌کنیم :

مسئله ـ دو دایرهٔ مساوی در M بر هم مماس خارج‌اند. ثابت کنید هر خط دلخواهی که از M عبور کند در دو دایره دو وتر متساوی به وجود می‌آورد (تصویر ۶۰).

روشن است که دو دایره نسبت به نقطهٔ M قرینهٔ یکدیگرند و این از آنجا نتیجه می‌شود که دو دایره برابرند و مراکز آنها قرینهٔ یکدیگر نسبت به M می‌باشد (تصویر ۶۰ و قضیهٔ ۳ شمارهٔ ۱۵) بنابراین نقاط A و B در تصویر ۶۰ قرینهٔ یکدیگر نسبت به M بوده و داریم $AM = BM$.



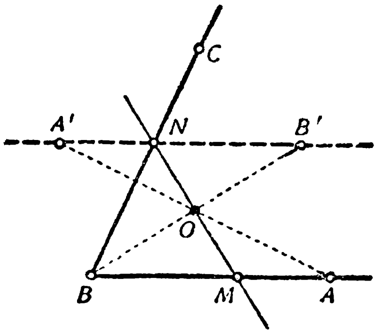
تصویر ۶۰

در حل مسائل مربوط به مرکز تقارن گاهی وجود تمام شکل مورد احتیاج نیست و کافی است که قسمتی از آن در دسترس باشد. در اینصورت مسئله را روی شکل

جدیدی مطرح می‌کنیم که برای حل ساده‌تر از وضع اصلی باشد (شمارهٔ ۱۰ را ببینید) . نمونه‌ای از این نوع ذکر می‌کنیم :

مسئله ـ زاویهٔ ABC و نقطهٔ O داخل آن داده شده است. خطی از نقطهٔ O عبور دهید که پاره‌خطی از آن که محدود به دو ضلع زاویه است در نقطهٔ O نصف شده باشد .

حل: ۱ ـ تحلیل ـ فرض می‌کنیم که مسئله حل شده و MN خط مورد جستجو است (M روی AB و N روی BC ، تصویر ۶۱)، چون O وسط MN است بنابراین M و N نسبت به نقطهٔ O



تصویر ۶۱

قرینهٔ یکدیگرند . ازطرف دیگر نقطهٔ M روی خط AB واقع است ، بنابراین قرینهٔ آن نقطهٔ N بایستی روی A'B' قرینهٔ AB نسبت به O قرار گیرد (روی تصویر ۶۱ خط

$A'B'$ نقطه چین رسم شده است) بنابراین N بایستی محل تلاقی $A'B'$ و BC باشد .

۲ـ رسم: A' و B' قرینه‌های A و B را نسبت به O پیدا می‌کنیم $A'B'$ را وصل کرده و N محل تلاقی آنرا با BC پیدا می‌کنیم خط NO جواب مسئله خواهد بود .

۳ـ اثبات : درستی رسم و **بحث** در بارهٔ مسئله را (اینکه مسئله تنها دارای یك جواب است) به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

مسائل و تمرینات

۱۱۱ ـ قضایای جدیدی مثل بزنید که بتوان آنهارا دوباره و با استفاده از مفهوم مرکز تقارن اثبات کرد.

۱۱۲ ـ دو دایرهٔ مساوی در نقطهٔ O مماس خارج‌اند. دو خط دلخواه‌که از نقطهٔ O عبور کرده‌اند این دو دایره را در نقاط A ، B و C ، D قطع کرده‌اند . ثابت کنید دو خط AC و BD متوازی‌اند .

۱۱۳ ـ فرض کنید A و B ، C و D نقاط متقاطر از دو دایرهٔ متحدالمرکز باشند. ثابت کنید پاره خطهای AC و BD مساوی و موازی‌اند (ویا بر یك خط منطبق‌اند).

۱۱۴ ـ روی دو وتر موازی و مساوی AB و CD از دایرهٔ F مثلثهای مساوی ABM و CDN رسم می‌ـ کنیم، بطوری‌که رئوس M وN در طرفی از وترهای AB و CD قرار گیرند که قوس کوچکتر AB یا CD قرار گرفته است. ثابت کنید که خط MN یا بر AB و CD عمود است و یااینکه ازمرکز دایره عبور می‌کند ودرحالت اخیر داریم $MO=NO$. درچه حالت هر دو وضع وجود خواهد داشت (یعنی‌هم MN عمود برAB وCDمی‌شود و هم در نقطهٔ O به دو قسمت مساوی تقسیم می‌شود ؟)

۱۱۵ـ درچهارضلعی ABCD قطر AC ازنقطهٔ O وسط قطر BD عبور کرده است. ثابت کنید که اگر $OA>OC$ باشد $\hat{A}<\hat{D}$ خواهد بود.

۱۱۶ـدربارهٔ چهار ضلعی ABCD چه‌می‌توان گفت، به شرطی‌که در آن $\hat{A}=\hat{D}$ و قطر BD از وسط قطر AC عبور کرده باشد.

۱۱۷ ـ از نقطهٔ مفروض Q خطی‌چنان عبور دهیدکه پاره خط بین نقاط تلاقی این‌خط با خط مفروض 1 و دایرهٔ

مفروض S در نقطهٔ Q به دو قسمت مساوی تقسیم شود .

۱۱۸ ـ از نقطهٔ A، نقطهٔ تقاطع دو دایرهٔ F و G خطی چنان عبور دهید که در دو دایره وترهای مساوی ایجاد کند.

۱۱۹ ـ در دایرهٔ F دو وتر AB و CD و روی وتر CD نقطهٔ Q داده شده، روی دایره نقطه‌ای مانند M چنان پیدا کنید که خطوط AM و BM روی وتر CD پاره خط KL را جدا کنند به‌طوری‌که به‌وسیلهٔ Q نصف شده باشد .

۱۲۰ ـ مثلث ABC به مساحت S مفروض است . فاصلهٔ نقطهٔ دلخواه M واقع در داخل مثلث را از سه ضلع αh_a و βh_b و γh_c فرض می‌کنیم که در آن h_a و h_b و h_c ارتفاعات مثلث ABC است . مطلوب است محاسبهٔ مساحت s سطح واقع بین مثلث ABC و $A'B'C'$ قرینهٔ ABC نسبت به M . نقطهٔ M را چطور باید انتخاب کرد تا سطح s ماکزیمم شود ؟

۳

تقارن در جبر

(عبارتهای متقارن)

در بحث مربوط به‌معادلات درجهٔ دوم اغلب به‌مسائلی شبیه مسئلهٔ زیر برخورد می‌کنیم:

بدون‌حل‌معادلهٔ درجه‌دوم(۱) $x^۲+۶x+۱۰=۰$، معادلهٔ درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌هایش مجذور ریشه‌های معادلهٔ مفروض باشد.

اگر ریشه‌های معادلهٔ مفروض را با $x_۱$ و $x_۲$ و ریشه‌های معادلهٔ مجهول را با $y_۱$ و $y_۲$ و ضرایب معادلهٔ مجهول را با p و q نشان دهیم، طبق قضیهٔ **ویت** (۱):

$$x_۱+x_۲=-۶ \text{ و } x_۱x_۲=۱۰$$

$$y_۱+y_۲=-p \text{ و } y_۱y_۲=q$$

اما طبق شرط مسئله داریم: $y_۱=x_۱^۲$ و $y_۲=x_۲^۲$

---

۱) ویت ریاضیدان بزرگ فرانسوی (۱۵۴۰ ـ ۱۶۰۳) برای نخستین‌بار روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دو را معین کرد و به همین مناسبت این روابط را به نام «قضیهٔ ویت» می‌نامند.

و بنابراین .

$$p=-(y_1+y_2)=-(x_1^2+x_2^2)$$ و
$$q=y_1 \cdot y_2=x_1^2 \cdot x_2^2$$

واضح است که :

$$x_1^2 \cdot x_2^2=(x_1 \cdot x_2)^2=10^2=100$$
$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=16$$

و از آنجا $p=-16$ و $q=100$ بوده و معادلهٔ مجهول چنین خواهد بود :

$$y^2-16y+100=0$$

باترتیب مشابهی می‌توان معادلهٔ درجهٔ دومی راتشکیل داد که ریشه‌های آن مکعب ریشه‌های معادلهٔ (۱) باشد .

اگر معادلهٔ مجهول را به صورت $z^2+mz+n=0$ درنظر بگیریم داریم :

$$m=-(x_1^3+x_2^3)$$ و $$n=x_1^3 \cdot x_2^3$$

و بنابراین :
$$x_1^3 \cdot x_2^3=(x_1x_2)^3=10^3=1000$$
$$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)=-36$$

و درنتیجه معادلهٔ مطلوب چنین خواهد بود :

$$z^2+36z+1000=0$$

می‌توان مسائل زیادی از این قبیل را طرح نمودکه حل آنها منجر به محاسبهٔ مجموع مربعات $x_1^2+x_2^2$ مجموع مکعبات $x_1^3+x_2^3$ و... غیره از روی x_1+x_2 و $x_1 \cdot x_2$ می‌شود. دراین دوعبارت مجموع مربعات‌ومجموع مکعبات ریشه‌ها، هردو ریشهٔ x_1 و x_2 دارای وضع‌مشابهی هستندیعنی هر دوعبارت‌نسبت به x_1 و x_2 **متقارن هستند.** البته‌عبارتهای‌سادهٔ x_1+x_2 و $x_1 \ x_2$ هم‌نسبت‌به x_1 و x_2 متقارنند. بنابراین مسئله به اینجا منجر می‌شود: عبارتهای متقارن نسبت به دو متغیر x_1 و x_2 را برحسب ساده‌ترین عبارتهای متقارن نسبت به این دو متغیر یعنی x_1+x_2 و $x_1 \ x_2$ حساب کنیم. در جبر عالی این مسئله‌در حالت کلی خود و برای‌کثیرالجمله‌هایی که نسبت به n متغیر متقارن باشند مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در اینجا مطالب اساسی مربوط به عبارتهای متقارن را (بدون اثبات آنها) بررسی می‌کنیم وسپس تمرینات زیادی ازمسائل متوسطه را به‌کمك این نظریهٔ عمومی حل می‌کنیم. خواهیم دید که توجه به عبارتهای متقارن تاچه اندازه به سهولت حل مسائل‌کمك

می‌کند . در آخر بحث هم مقداری مسئله برای تمرین خواهیم آورد .

☆☆☆

تعاریف اساسی

کثیرالجملهٔ $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ از n متغیر را نسبت به این متغیرها متقارن گویند وقتی که وضع تمام متغیرها در آن مشابه هم باشد یعنی اگر هر دومتغیر غیر مشخص را در آن به یکدیگر تبدیل کنیم کثیرالجمله تغییر نکند .

درحقیقت اگر دو متغیر غیر مشخص x_i و x_j را در نظر گرفته ودر کثیرالجملهٔ $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ به‌جای x_i مقدار x_j و به جای x_j مقدار x_i را قرار دهیم ، اگر کثیر الجمله نسبت به متغیرها متقارن باشد بایستی برای هر انتخاب x_i و x_j ثابت بماند ، مثلاً داشته باشیم :

$$f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = f(x_2, x_1, x_3, \dots, x_n)$$

(در اینجا جای x_1 و x_2 را با هم عوض کرده‌ایم) .

و یا به طور کلی داشته باشیم :

$$f(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{ni}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

مثلاً کثیر الجملهٔ :

$$x_1^3+x_2^3+x_3^3-3x_1x_2x_3 \qquad (2)$$

یك کثیرالجملهٔ متقارن است زیرا اگر مثلاً درآن جای x_1 و x_2 را با هم عوض کنیم ، کثیرالجمله به خودش تبدیل می‌شود (۱) .

در زیر کثیرالجمله‌های دیگری که نسبت به‌سه‌متغیر متقارنند داده شده است :

$$(x_1^2+x_2^2)^2-3x_1x_2^3-3x_1^3x_2 \text{ و}$$
$$(x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_3+x_1) \text{ و}$$

---

۱) اگر در کثیر الجملهٔ $f(x_1 \text{ و } x_2 \text{ و } \ldots \text{ و } x_n)$ ، x_1 را به x_2 و x_2 را به x_3 و . . . . . ، x_{n-1} را به x_n و x_n را به x_1 تبدیل کنیم گویند کثیرالجمله را تبدیل دوری کرده‌ایم و اگر یك کثیرالجمله درتبدیل دوری به خودش تبدیل شودگویندکه دور (سیکل) تشکیل می‌دهد .

واضح است که هر کثیرالجمله متقارن یك دورتشکیل خواهد داد ، درحالی که هر دور الزاماً یك عبارت متقارن نیست .

مثلاً کثیرالجملهٔ (۲) که یك کثیرالجملهٔ متقارن است ، تشکیل یك دورهم می‌دهد. یعنی با تبدیل $x_1 \to x_2$ و $x_2 \to x_3$ و $x_3 \to x_1$ کثیرالجمله به خودش تبدیل می‌شود .

در حالی که کثیرالجملهٔ :

$$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_1$$

که نسبت به x_1 و x_2 و x_3 و x_4 یك دور تشکیل می‌دهد متقارن نیست و مثلاً اگر جای x_1 و x_2 را با هم عوض کنیم‌این کثیرالجمله به خودش تبدیل نمی‌شود . « مترجم »

$$x_1(x_2^4+x_3^4)+x_2(x_3^4+x_1^4)+x_3(x_1^4+x_2^4).$$

ولی عبارت $x_1^2+x_2^4$ عبارتی متقارن نیست زیرا اگر در آن جای x_1 و x_2 را با هم عوض کنیم عبارت $x_2^2+x_1^4$ را به‌دست خواهیم آورد که باعبارت اول متفاوت است.

ساده‌ترین کثیرالجمله‌های متقارن عبارتند از: مجموع تمام متغیرها: $x_1+x_2+\cdots+x_n$؛ مجموع جملاتی که از حاصل ضرب دو به‌دوی متغیرها می‌آید:

$x_1x_2+x_1x_3+\cdots\cdots+x_{n-1}x_n$؛ مجموع جملاتی که از حاصلضرب سه به سه جملات به دست می‌آید:

$$x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+\cdots\cdots+x_{n-2}x_{n-1}x_n$$

وغیره و بالاخره حاصلضرب تمام‌متغیرها: $x_1x_2x_3\cdots\cdots x_n$ بنابراین برای n متغیر n کثیرالجملهٔ سادهٔ متقارن خواهیم داشت. که آنها را به σ_1 و σ_2 … σ_n نشان می‌دهیم:

$$\sigma_1=x_1+x_2+\cdots+x_n \quad و$$

$$\sigma_2=x_1x_2+x_1x_3+\cdots x_{n-1}x_n \quad و \qquad (3)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sigma_n=x_1x_2\cdots\cdots x_n.$$

برای دو متغیر ، عبارتهای متقارن ساده عبارتند از $\sigma_1 = x_1 + x_2$ و $\sigma_2 = x_1 x_2$ و برای سه متغیر داریم :

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3 \quad \text{و}$$
$$\sigma_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 \quad \text{و} \qquad (۴)$$
$$\sigma_3 = x_1 x_2 x_3$$

باکمك عبارتهای متقارن‌ساده‌می‌توان‌به سهولت‌عبارتهای متقارن دیگری از همین متغیرها درست کرد . کافی است کثیرالجملهٔ دلخواهی به‌شکل $\varphi(\sigma_1 ، \sigma_2 ، \dots ، \sigma_n)$ وازمتغیر های σ_1،σ_2و . . . وσ_nانتخاب‌کنیم (لازم‌نیست این‌کثیرالجمله نسبت به σ_1وσ_2و...وσ_n متقارن باشد) تا عبارت متقارنی نسبت به x_1 و x_2 و......وx_n داشته باشیم . مثلاً اگر $\varphi(\sigma_1 ، \sigma_2 ، \sigma_3) = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3$ باشد که در آن σ_1وσ_2وσ_3 همان عبارتهای (۴) هستند . دراین‌صورت خواهیم داشت :

$$f(x_1 ، x_2 ، x_3) = (x_1 + x_2 + x_3)^3 - 3(x_1 + x_2 + x_3)(x_1 x_2 + x_3 x_1 + x_2 x_3) - x_1 x_2 x_3$$

که پس از خلاصه کردن چنین خواهیم داشت :

$$f(x_1 ، x_2 ، x_3) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 4x_1 x_2 x_3$$

یکی از نتایج اساسی نظریهٔ چند جمله‌ایهای متقارن

این‌است‌که ازاین راه می‌توان همهٔ انواع کثیرالجمله‌هایی را که نسبت به متغیرهای x_1 و x_2 و … و x_n متقارنند به دست آورد . و یا به عبارت دیگر می‌توان قضیهٔ زیر را بیان کرد :

قضیهٔ ۱ ـ اگر $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ کثیرـ الجملهٔ متقارنی نسبت به n متغیر خود باشد ، در این‌صورت تنها یك کثیرالجمله به شکل : $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ وجود داردکه اگردرآن به‌جای σ_1 و σ_2 و … و σ_n عبارتهای (۳) را قرار دهیم کثیرالجملهٔ $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ بدست آید .

اثبات این قضیه مربوط به جبرعالی است ومادراینجا دربارهٔ آن صحبت نمی‌کنیم. تنها راه جستجوی کثیرالجملهٔ $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ را متذکر می‌شویم : اولاً روشن‌ـ است که هر کثیرالجملهٔ متقارن $f(x_1, x_2, \dots, \sigma_n)$را می‌توان به صورت مجموعی‌ازکثیرالجمله‌های متقارن‌نوشت.

فرض کنیم $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ کثیر الجملهٔ متقارنی از درجهٔ k باشد ، ببینیم جملهٔ به صورت $\sigma_1^{\lambda_1}\sigma_2^{\lambda_2}\dots\sigma_n^{\lambda_n}$ به چه صورت می‌تواند در کثیر الجملهٔ $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ وجود داشته باشد . ساده‌ترین

کثیرالجملهٔ متقارن یعنی σ_1 نسبت به x_1 و x_2 و ... و x_n از درجهٔ اول است. σ_2 از درجهٔ دوم و به طور کلی σ_m ازدرجهٔ m ام و بنابراین درجهٔ جملهٔ $\sigma_1^{\lambda_1}\sigma_2^{\lambda_2}\ldots\sigma_n^{\lambda_n}$ نسبت به متغیرهای x_1 و x_2 و...... و x_n درجه‌ای مساوی $\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3+\ldots+n\lambda_n$ خواهد داشت وازاینجااین نتیجه بدست می‌آید که در جملهٔ $\sigma_1^{\lambda_1}\sigma_2^{\lambda_2}\ldots\sigma_n^{\lambda_n}$ باید داشته باشیم :

$$\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=k$$

تمام جوابهای صحیح و مثبت این معادله ، تمام یك جمله‌ایهایی راکه‌می‌توانند درکثیرالجملهٔ $\varphi(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)$ وجود داشته باشد به ما خواهد داد .

برای‌محاسبهٔ ضریب یك‌جمله‌ای $\sigma_1^{\lambda_1}\sigma_2^{\lambda_2}\ldots\sigma_n^{\lambda_n}$ می‌توان از روش زیر استفاده کرد :

فرض کنید که می‌خواهیم عبارت $x_1^3+x_2^3+x_3^3$ را بر حسب کثیرالجمله‌های سادهٔ متقارن σ_1 و σ_2 و σ_3 (روابط ۴ را ببینید) محاسبه کنیم : ازآنجا که درجهٔ این کثیر الجمله‌مساوی۳ می‌باشد بایستی ابتداجوابهای مثبت و

صحیح معادلهٔ زیر را به دست آورد:

$$\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3=3$$

	λ_1	λ_2	λ_3
۱)	۳	۰	۰
۲)	۱	۱	۰
۳)	۰	۰	۱

دیده می‌شود که دارای سه دسته جواب خواهیم بود.

بنابراین در عبارت $x_1^3+x_2^3+x_3^3$ تنها جملات σ_1^3 و $\sigma_1 \cdot \sigma_2$ و σ_3 می‌تواند وجود داشته باشد، به عبارت دیگر داریم:

$$x_1^3+x_2^3+x_3^3=A\sigma_1^3+B\sigma_1\sigma_2+C\sigma_3 \quad (5)$$

این رابطه بایستی برای هرمقدار دلخواه از x_1 و x_2 و x_3 بر قرار باشد. بنابراین اگر ابتدا $x_1=1$ و $x_2=0$ و $x_3=0$ رادرعبارت بالاقرار دهیم(که دراینصورت باتوجه به روابط (۴): $\sigma_1=1$ و $\sigma_2=0$ و $\sigma_3=0$ خواهد شد) رابطه (۵) به صورت $A=1$ در خواهد آمد.

اکنون اگر $x_1=1$ و $x_2=1$ و $x_3=0$ بگیریم با توجه به اینکه $A=1$ بود $B=-3$ در خواهد آمد و بالاخره به ازاء مثلاً $x_1=1$ و $x_2=1$ و $x_3=-2$

خواهیم داشت $C=3$ و بنابراین داریم :

$$x_1^3+x_2^3+x_3^3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3$$

در بسیاری موارد روش عمومی مذکور در بالا برای پیدا کردن کثیرالجملهٔ $\varphi(\sigma_1$ و σ_2 و $\dots\sigma_n)$ منجر به عملیات بسیار مفصلی می‌شود . ولی اغلب لازم است **مجموع قوای متشابه** متغیرها را برحسب عبارتهای سادهٔ متقارن به دست بیاوریم ، مجموع قوای متشابه به صورت زیر است :

$$S_k\equiv x_1^k+x_2^k+\dots+x_n^k$$

دراین‌حالت می‌توان از رابطهٔ زیر استفاده‌کرد که S_k را برحسب عبارتهای سادهٔ متقارن به دست می‌دهند :

$$S_k\equiv x_1^k+x_2^k+\dots+x_n^k=$$

$$k+\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n\times$$

$$=k\cdot\Sigma(-1)$$

$$\times\frac{(\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n-1)!\,\sigma_1^{\lambda_1}\sigma_2^{\lambda_2}\dots\sigma_n^{\lambda_n}}{\lambda_1!\lambda_2!\lambda_3!\dots\lambda_n!}$$

که در آن $\lambda_2+2\lambda_2+\dots+n\lambda_n=k$ می‌باشد .

همچنین اگر در این عبارت به $(0!)$ برخورد کردیم آنرا مساوی ۱ خواهیم گرفت. (این رابطه به‌رابطهٔ **«وارینگا»** مشهوراست وما ازاثبات‌آن صرفنظرمی‌کنیم).

برای دومتغیر x_1 و x_2 طبق رابطهٔ **وارینگا** خواهیم داشت:

$$(6\quad \begin{cases} S_1 = x_1^2 + x_2^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 \\ S_3 = x_1^3 + x_2^3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 \\ S_4 = x_1^4 + x_2^4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 \\ S_5 = x_1^5 + x_2^5 = \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2 \end{cases}$$

مثلاً درحالتی‌که $k=5$ باشد، ابتدا ریشه‌های صحیح و مثبت $\lambda_1 + 2\lambda_2 = 5$ را حساب می‌کنیم، این ریشه‌ها عبارتند از:

$$\left|\begin{array}{l}\lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2\end{array}\right. \quad \text{و} \quad \left|\begin{array}{l}\lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = 1\end{array}\right. \quad \text{و} \quad \left|\begin{array}{l}\lambda_1 = 5 \\ \lambda_2 = 0\end{array}\right.$$

بنابراین داریم:

$$S_5 = 5 \times [(-1)^{5+5+0} \times \frac{4!}{5!0!}\sigma_1^{5}\sigma_3^{0} +$$

$$+(-1)^{5+3+1}\times\frac{3!}{3!2!}\sigma_1^{3}\sigma_2^{1}+$$

$$+(-1)^{5+1+2}\times\frac{2!}{1!2!}\sigma_1^{1}\sigma_2^{2}]=\sigma_1^{5}-5\sigma_1^{3}\sigma_2+5\sigma_1\sigma_2^{2}]$$

همچنین اگر بخواهیم مجموع قوای متشابه سه متغیر را به‌کمك رابطهٔ «وارینگا» به‌دست‌آوریم داریم :

$$\begin{cases} S_2=x_1^2+x_2^2+x_3^2=\sigma_1^2-2\sigma_2 \\ S_3=x_1^3+x_2^3+x_3^3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+2\sigma_3 \qquad (7) \\ S_4=x_1^4+x_2^4+x_3^4=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2+4\sigma_1\sigma_3 \\ S_5=x_1^5+x_2^5+x_3^5=\sigma_1^5-5\sigma_1^3\sigma_2+5\sigma_1\sigma_2^2+ \\ \quad +5\sigma_1^2\sigma_3-5\sigma_2\sigma_3 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{cases}$$

و برای ۴ متغیر :

$$\begin{cases} S_2=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=\sigma_1^2-2\sigma_2 \\ S_3=x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3 \\ S_4=x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+ \\ \qquad +2\sigma_2^2+4\sigma_1\sigma_3-4\sigma_4 \qquad (8) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{cases}$$

با ترکیب این روابط می‌توان برای سایر عبارتهای

متقارن هم روابطی به‌دست‌آورد. مثلاً برای محاسبهٔ عبارت متقارن:

$$x_1^2x_2+x_1^2x_3+x_1x_2^2+x_1x_3^2+x_2^2x_3+x_2x_3^2$$

داریم:

$$(x_1+x_2+x_3)^3=x_1^3+x_2^3+x_3^3+3(x_1^2x^2+$$
$$+x_1^2x_3+x_1x_2^2+x_1x_3^2+x_2^2x^3+x_2x_3^2)+$$
$$+6x_1x_2x_3$$

با استفاده از رابطهٔ دوم شمارهٔ (۷) تساوی بالا به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\sigma_1^3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3+3(x_1^2x_2+x_1^2x_3+$$
$$+x_1x_2^2+x_1x_3^2+x_2^2x_3+x_2x_3^2)+6\sigma_3$$

وازآنجا خواهیم داشت:

$$x_1^2x_2+x_1^2x_3+x_1x_2^2+x_1x_3^2+x_2^2x_3+$$
$$+x_2x_3^2=\sigma_1\sigma_2-3\sigma_3 \qquad (9)$$

همچنین با استفاده از اتحاد:

$$(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^2=x_1^4+x_2^4+x_3^4+2(x_1^2x_2^2+$$
$$+x_1^2x_3^2+x_2^2x_3^2)$$

خواهیم داشت:

$$x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+x_2^2x_3^2-\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_3 \qquad (10)$$

وازاتحاد :

$$(x_1+x_2+x_3)^4=x_1^4+x_2^4+x_3^4+4(x_1^3x_2+x_1^3x_3+x_1x_2^3+x_1x_3^3+x_2^3x_3+x_3^3x_2)+6(x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+x_2^2x_3^2)+12x_1x_2x_3(x_1+x_2+x_3)$$

خواهیم داشت :

$$x_1^3x_2+x_1^3x_3+x_1x_2^3+x_1x_3^3+x_2^3x_3+x_2x_3^3=\sigma_1^2\sigma_2-2\sigma_2^2-\sigma_1\sigma_2 \qquad (11)$$

☆ ☆ ☆

نظریهٔ عبارتهای متقارن می‌تواند برای حل دستگاههای جبری و اثبات اتحادها مورد استفاده قرار گیرد و کار محاسبه و اثبات را به‌قدر کافی ساده نماید. درحقیقت در بسیاری موارد به دستگاههایی برخورد می‌کنیم که عبارتهای سمت چپ تساوی درآنها عبارتهای متقارنی نسبت به‌مجهولات هستند. دراین حالت می‌توان عبارتهای سمت چپ را برحسب عبارتهای سادهٔ متقارن نوشت و به‌این ترتیب درجهٔ معادله را پایین آورد (زیرا σ_1 و σ_2 و . . . و σ_n کثیرالجمله‌هایی از x_1 و x_2 و . . . و x_n هستند که درجهٔ آنها بالاتر از واحد است):

چند مثال ذکر می‌کنیم :

مثال ۱ـ دستگاه معادلات زیر را حل کنید :

$$\begin{cases} x^{۳}+y^{۳}=۳۵ \\ x+y=۵ \end{cases}$$

مجهولات جدید را چنین انتخاب می‌کنیم :

$$x+y=\sigma_{۱} \quad و \quad x\cdot y=\sigma_{۲}$$

با توجه به‌رابطهٔ (۶) خواهیم داشت :

$$x^{۳}\times y^{۳}=\sigma_{۱}^{۳}-۳\sigma_{۱}\sigma_{۲}$$

ودرنتیجه دستگاه معادلات بالا به‌دستگاه زیر تبدیل می‌شود :

$$\begin{cases} \sigma_{۱}^{۳}-۳\sigma_{۱}\sigma_{۲}=۳۵ \\ \sigma_{۱}=۵ \end{cases}$$

از این دستگاه به سادگی $\sigma_{۲}=۶$ به‌دست می‌آید و بنابراین خواهیم داشت :

$$\begin{cases} x+y=۵ \\ x\cdot y=۶ \end{cases}$$

حال این دستگاه به‌سادگی‌حل می‌شود (مثلاً باکمك رابطهٔ ویت) وجوابها چنین خواهند بود :

$$\left|\begin{array}{l} x_{۱}=۲ \\ y_{۱}=۳ \end{array}\right. \quad و \quad \left|\begin{array}{l} x_{۲}=۳ \\ y_{۲}=۲ \end{array}\right.$$

مثال۲ـ دستگاه معادلات زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} x^{5}+y^{5}=33 \\ x+y=3 \end{cases}$$

اگر شبیه تمرین قبل عمل کنیم خواهیم داشت :

$$\begin{cases} \sigma_1^{5}-5\sigma_1^{3}\sigma_2+5\sigma_1\sigma_2^{2}=33 \\ \sigma_1=3 \end{cases}$$

(رابطهٔ ۴ از روابط ۵ را ببینید) . از اینجا برای محاسبهٔ σ_2 معادلهٔ درجهٔ دوم زیر را خواهیم داشت:

$$15\sigma_2^{2}-135\sigma_2+210=0$$

و یا :

$$\sigma_2^{2}-9\sigma_2+14=0$$

و بنابراین جوابهای σ_2 برابر با ۲ و ۷ می‌شود .

بنابراین حل دستگاه بالا به‌حل دودستگاه سادهٔ زیر منجر می‌شود :

$$\begin{cases} x+y=3 \\ x\cdot y=2 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x+y=3 \\ x\cdot y=7 \end{cases}$$

که با حل این دو دستگاه جوابهای زیر را خواهیم داشت :

$$\left|\begin{array}{l} x_1=1 \\ y_1=2 \end{array}\right. \quad \text{و} \quad \left|\begin{array}{l} x_2=2 \\ y_1=1 \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{aligned} x_3 &= \frac{3+i\sqrt{19}}{2} \\ y_3 &= \frac{3-i\sqrt{19}}{2} \end{aligned}\right. \quad \text{و} \quad \left|\begin{aligned} x_4 &= \frac{3-i\sqrt{19}}{2} \\ y_4 &= \frac{3+i\sqrt{19}}{2} \end{aligned}\right.$$

(که درآن $i=\sqrt{-1}$ درنظر گرفته شده است) .

☆ ☆ ☆

به همین ترتیب می‌توان دستگاههای سه مجهولی را وقتی که عبارتهای سمت چپ آنها نسبت به‌مجهولات x و y و z متقارن باشند حل‌کرد : ولی در اینحالت مطلب کمی دشوارتر است فرض کنید که از یك دستگاه سه‌معادلهٔ سه‌مجهولی مقادیر $\sigma_1=b_1$ و $\sigma_2=b_2$ و $\sigma_3=b_3$ را به‌دست آورده باشیم بنابراین بایستی دستگاه زیر را حل نماییم :

$$\begin{cases} x+y+z=b_1 \\ xy+xz+yz=b_2 \\ x\cdot y\cdot z=b_3 \end{cases} \qquad (14)$$

درحالت دومجهولی می‌توانستیم باکمك رابطهٔ ویت مجهولات را به‌دست آوریم ، اینجا هم می‌توان برای حالت سه مجهولی به همان طریق مسئله را حل‌کرد . فرض کنیم $x=\alpha$ و $y=\beta$ و $z=\gamma$ یك دسته جواب از دستگاه (۱۴)

باشند ، دراین‌صورت اتحادهای زیر را خواهیم داشت :

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=b_1\\ \alpha\beta+\alpha\gamma\times\beta\gamma=b_2\\ \alpha\beta\gamma=b_3\end{cases}$$

اکنون اگر عبارت $(u-\alpha)(u-\beta)(u-\gamma)$ را برحسب قوای u منظم‌کنیم داریم :

$$(u-\alpha)(u-\beta)(u-\gamma)=u^3-(\alpha+\beta+\gamma)u^2+$$
$$+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)u-\alpha\beta\gamma=u^3-b_1u^2+b_2u-b_3$$

سمت چپ این عبارت به‌ازاء $u=\alpha$ و $u=\beta$ و $u=\gamma$ برابر صفر می‌شود (وفقط به‌ازاء همین مقادیر مساوی صفر می‌شود) و بنابر این α و β و γ ریشه‌های معادلهٔ زیر خواهند بود :

$$u^3-b_1u^2+b_2u-b^3=0 \qquad (15)$$

بنابراین با حل معادلهٔ (۱۵) ریشه‌های دستگاه (۱۴) را دردست خواهیم داشت. ولی روشن است که دراین‌صورت دستگاه دارای ۶ جواب خواهد بود، زیرا عبارتها نسبت به x و y و z متقارن‌اند وبنابراین می‌توان نقش‌مجهولات را با یکدیگرعوض کرد . یعنی باکمك جوابهای $x=\alpha$ و $y=\beta$ و $z=\gamma$ جوابهای $x=\beta$ و $y=\gamma$ و $z=\alpha$ و یا $x=\gamma$ و

$y=\alpha$ و $z=\beta$ وغیره را خواهیم داشت .

همین روش را می‌توان برای مواردی که تعداد مجهولات بیشتر هم باشد به‌کار برد ، درحالت کلی داریم :

$$\begin{cases} x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n=b_1 \\ x_1x_2+x_1x_3+\cdots\cdots+x_{n-1}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1x_2\cdots\cdots x_n=b_n \end{cases}$$

بایستی معادلهٔ درجه n ام زیر را تشکیل داد :

$$u^n-b_1u^{n-1}+b_2u^{n-2}-\cdots\cdots+(-1)^nb_n=0$$

که دراین‌صورت یك دسته‌ازریشه‌های دستگاه (۱۶) خواهد بود :

$$x_1=\alpha_1 \text{ و } x_2=\alpha_2 \text{ و } x_3=\alpha_3 \text{ و } \cdots\cdots \text{ و } x_n=\alpha_n$$

وبقیهٔ ریشه‌ها هم با تبدیل دوری این ریشه‌ها به‌دست خواهندآمد .

مثال ۳ـ دستگاه سه معادلهٔ سه مجهولی زیر را حل کنید :

$$\begin{cases} x+y+z=a \\ x^2+y^2+z^2=b^2 \\ x^3+y^3+z^3=a^3 \end{cases}$$

اگر مجهولات جدید را σ_1 و σ_2 و σ_3 بگیریم :

$$\begin{cases} x+y+z=\sigma_1 \\ xy+yz+zx=\sigma_2 \\ xyz=\sigma_3 \end{cases}$$

دستگاه جدیدی به این شکل خواهیم داشت (باکمک رابطهٔ ۷):

$$\begin{cases} \sigma_1=a \\ \sigma_1^2-2\sigma_2=b^2 \\ \sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3=a^3 \end{cases}$$

با حل این دستگاه ساده مقادیر σ_1 و σ_2 و σ_3 به‌دست خواهد آمد :

$$\begin{cases} \sigma_1=a \\ \sigma_2=\frac{1}{2}(a^2-b^2) \\ \sigma_3=\frac{1}{2}a(a^2-b^2) \end{cases}$$

ازآنجا داریم :

$$\begin{cases} x+y+z=a \\ xy+yz+zx=\frac{1}{2}(a^2-b^2) \\ xyz=\frac{1}{2}a(a^2-b^2) \end{cases}$$

و برای پیدا کردن ریشه‌های این معادله بایستی معادلهٔ درجهٔ سوم زیر را حل کرد :

$$u^۳-au^۲+\frac{۱}{۲}(a^۲-b^۲)u-\frac{۱}{۲}a(a^۲-b^۲)=۰$$

عبارت سمت چپ این معادله قابل تجزیه است و خواهیم داشت :

$$(u-a)[u^۲+\frac{۱}{۲}(a^۲-b^۲)]=۰$$

وازآنجا داریم :

$$u_۱=a \quad \text{و} \quad u_۲=\sqrt{\frac{b^۲-a^۲}{۲}} \qquad \text{و}$$

$$u_۳=-\sqrt{\frac{b^۲-a^۲}{۲}}$$

و بنا بر این دستگاه معادلات اصلی دارای ۶ دسته جواب خواهند بود که از تبدیل دوری جوابهای زیر به‌دست خواهد آمد :

$$x=a \text{ و } y=\sqrt{\frac{b^۲-a^۲}{۲}} \quad \text{و} \quad z=-\sqrt{\frac{b^۲-a^۲}{۲}}$$

✡ ✡ ✡

تبدیل به عبارتهای سادهٔ متقارن تنها برای حل

دستگاهها مورد استفاده قرارنمی‌گیرد ، بلکه در بسیاری از موارد دیگر جبر هم می‌توان ازآن استفاده کرد (تبدیل به حاصلضرب ، اثبات اتحادها وغیره) .

مثال ۴ـ عبارت زیررا به صورت ضرب عوامل اول تجزیه‌کنید :

$$x^{۳}+y^{۳}+z^{۳}-۳xyz$$

باکمك رابطهٔ دوم ازروابط (۷) داریم :

$$x^{۳}+x^{۳}+z^{۳}=\sigma_{۱}^{۳}-۳\sigma_{۱}\sigma_{۲}+۳\sigma_{۳}$$

وبنابراین :

$$x^{۳}+y^{۳}+z^{۳}-۳xyz=(\sigma_{۱}^{۳}-۳\sigma_{۱}\sigma_{۲}+$$
$$+۳\sigma_{۳})-۳\sigma_{۳}=\sigma_{۱}^{۳}-۳\sigma_{۱}\sigma_{۲}=\sigma_{۱}(\sigma_{۱}^{۲}-$$
$$-۳\sigma_{۲})=(x+y+z)[(x+y+z)^{۲}-$$
$$-۳(xy+yz+zx)]=$$
$$(x+y+z)(x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}-xy-yz-zx)$$

مثال ۵ ـ عبارت زیر را به‌صورت ضرب عوامل اول تجزیه‌کنید :

$$۲x^{۲}y^{۲}+۲x^{۲}z^{۲}+۲y^{۲}z^{۲}-x^{۴}-y^{۴}-z^{۴}$$

باکمك روابط (۱۰) و (۷) داریم :

$$۲x^{۲}y^{۲}+۲x^{۲}z^{۲}+۲y^{۲}z^{۲}-x^{۴}-y^{۴}-z^{۴}=$$

$$=2(\sigma_2{}^2-2\sigma_1\sigma_3)-(\sigma_1{}^4-4\sigma_1{}^2\sigma_2+2\sigma_2{}^3+$$
$$+4\sigma_1\sigma_3)=-\sigma_1{}^4-4\sigma_1{}^2\sigma_2-8\sigma_1\sigma_3=\sigma_1(4\sigma_1\sigma_2-$$
$$-\sigma_1{}^3-8\sigma_3)$$

بنابراین عبارت مفروض بر $\sigma_1=x+y+z$ قابل ـ قسمت است ولی از آنجا که تمام توانهای این عبارت زوج است با تبدیل x به $-x$ عبارت تغییر نمی‌کند (همچنین با تبدیل y به $-y$ و z به $-z$) وبنابراین نه‌تنها عبارت بر $x+y+z$ بلکه بر $-x+y+z$ و $x-y+z$ و $x+y-z$ نیزقابل قسمت خواهد بود و از آنجا خواهیم داشت :

$$2x^2y^2+2y^2z^2+2y^2z^2-x^4-y^4-z^4=$$
$$=(x+y+z)(-x+y+z)\times$$
$$\times(x-y+z)(x+y-z)\cdot P(x\text{ و }y\text{ و }z)\,.$$

که درآن $P(x\text{ و }y\text{ و }z)$ کثیرالجمله متقارنی نسبت به x و y و z خواهد بود . با توجه به‌توان عبارت در سمت چپ و سمت راست روشن می‌شود که $P(x\text{ و }y\text{ و }z)$ عبارتی از درجهٔ صفر است و بنابراین مساوی عددی مانند k خواهد بود . برای به دست آوردن این عدد مثلاً در دو طرف

$x=y=z=1$ قرار می‌دهیم وازآنجا $k=1$ را به‌دست خواهیم‌آورد ، درنتیجه خواهیم داشت :

$$2x^2y^2+2x^2z^2+2y^2z^2-x^4-y^4-z^4=$$
$$=(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)\times$$
$$\times(x+y-z).$$

مثال ۶ـ صحت اتحاد زیر را تحقیق کنید :

$$(x+y+z)(xy+xz+zy)-xyz=$$
$$=(x+y)(x+z)(y+z)$$

سمت چپ تساوی برابر $\sigma_1\sigma_2-\sigma_3$ می‌باشد ، اما برای عبارت سمت راست تساوی داریم :

$$(x+y)(x+z)(y+z)=x^2y+x^2z+xy^2+$$
$$+xz^2+y^2z+yz^2\times 2xyz=(\sigma_1\sigma_2-3\sigma_3)+$$
$$+2\sigma_3=\sigma_1\sigma_2-\sigma_3$$

مثال ۷ـ ثابت کنید که اگر $x+y+z=0$ باشد داریم :

$$x^4+y^4+z^4=2(xy+xz+yz)^2$$

با توجه به‌رابطهٔ سوم از روابط (۷) داریم:

$$x^4+y^4+z^4=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2+4\sigma_1\sigma_3$$

و با توجه به $\sigma_1=x+y+z=0$ خواهیم داشت :

$$x^4+y^4+z^4=2\sigma_2^{\,2}=2(xy+xz+yz)^2$$

مثال ۸ــ ثابت کنید که اگر داشته باشیم :

$$x+y+z=x^2-y^2+z^2=x^3+y^3+z^3=1$$

در این صورت $xyz=0$ خواهد بود .

با توجه به روابط (۷) شرط مسئله را می‌توان به‌ـ صورت زیر نوشت :

$$\begin{cases}\sigma_1=1\\ \sigma_1^{\,2}-2\sigma_2=1\\ \sigma_1^{\,3}-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3=1\end{cases}$$

با حل این دستگاه ساده $\sigma_2=\sigma_3=0$ به دست می‌ـ آید که ازجواب $\sigma_3=0$ داریم : $xyz=0$.

مثال ۹ــ اگر داشته باشیم :

$$\begin{cases}x+y+z=u+v+w\\ x^2+y^2+z^2=u^2+v^2+w^3\\ x^3+y^3+z^3=u^3+v^3+w^2\end{cases}\qquad(17)$$

ثابت کنید که برای هرعدد صحیح ومثبت n خواهیم داشت :

$$x^n+y^n+z^n=u^n+v^n+w^n$$

عبارتهای سادهٔ متقارن نسبت به x و y و z را σ_1 و σ_2 و σ_3

ونسبت‌به u و v و w را t_1 و t_2 و t_3 می‌نامیم، دراین‌صورت دستگاه (۱۷) به‌صورت زیر درمی‌آید :

$$\begin{cases} \sigma_1 = t_1 \\ \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = t_1^2 - 2t_2 \\ \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 = t_1^3 - 3t_1t_2 - 2t_3 \end{cases}$$

وازآنجا خواهیم داشت :

$$\sigma_1 = t_1 \text{ و } \sigma_2 = t_2 \text{ و } \sigma_3 = t_3$$

وبنابراین رابطهٔ زیر محقق خواهد بود :

$$\varphi(\sigma_1 \text{ و } \sigma_2 \text{ و } \sigma_3) = \varphi(t_1 \text{ و } t_2 \text{ و } t_3)$$

از اینجا با کمك قضیهٔ ۱ نتیجه می‌شود که اگر $f(x \text{ و } y \text{ و } z)$ عبارت متقارنی نسبت به x و y و z باشد خواهیم داشت :

$$f(x \text{ و } y \text{ و } z) = f(u \text{ و } v \text{ و } w)$$

ودرحالت خاص :

$$x^n + y^n + z^n = u^n + v^n + w^u$$

☆ ☆ ☆

متذکرمی‌شویم‌که در بسیاری موارد می‌توان عبارتهای جبری غیرمتقارن را هم با کمی دقت به عبارتهای متقارن

تبدیل نمود :

مثال ۱۰ ـ دستگاه معادلات زیر را حل‌کنید :

$$\begin{cases} x+2y-3z=a \\ x^2+4y^2+9z^2=b^2 \\ x^3+8y^3-27z^3=a^3 \end{cases}$$

که اگر $x=u$ و $2y=v$ و $-3z=w$ فرض کنیم

دستگاه متقارن زیر را خواهیم داشت :

$$\begin{cases} u+v+w=a \\ u^2+v^2+w^2=b^2 \\ u^3+v^3+w^3=a^3 \end{cases}$$

این دستگاه را هم قبلاً حل کرده‌ایم (مثال ۳ را ببینید) در آنجا دیدیم که یکی از ریشه های این دستگاه چنین بود :

$$u=a \quad \text{و} \quad v=\sqrt{\frac{b^2-a^2}{2}} \quad \text{و} \quad w=-\sqrt{\frac{b^2-a^2}{2}}$$

و پنج جواب بقیه را نیز می‌توان به سهولت بدست آورد ودرنتیجه برای دستگاه اصلی ریشه‌های زیرراخواهیم داشت :

$$\begin{cases} x_{۱}=a \\ y_{۱}=\frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{b^{۲}-a^{۲}}{۲}} \\ z_{۱}=\frac{۱}{۳}\sqrt{\frac{b^{۲}-a^{۲}}{۲}} \end{cases}$$

و

$$\begin{cases} x_{۲}=a \\ y_{۲}=-\frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{b^{۲}-a^{۲}}{۲}} \\ z_{۲}=-\frac{۱}{۳}\sqrt{\frac{b^{۲}-a^{۲}}{۲}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{۳}=\sqrt{\frac{b^{۲}-a^{۲}}{۲}} \\ y_{۳}=\frac{۱}{۲}a \\ z_{۳}=\frac{۱}{۳}\sqrt{\frac{b^{۲}-a^{۲}}{۲}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{۴}=-\sqrt{\frac{b^{۲}-a^{۲}}{۲}} \\ y_{۴}=\frac{۱}{۲}a \\ z_{۴}=-\frac{۱}{۳}\sqrt{\frac{b^{۲}-a^{۲}}{۲}} \end{cases}$$

و

$$\begin{cases} x_{۵}=\sqrt{\frac{d^{۲}-a^{۲}}{۲}} \\ y_{۵}=-\frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{b^{۲}-a^{۲}}{۲}} \\ z_{۵}=-\frac{۱}{۳}a \end{cases}$$

و

$$\begin{cases} x_6 = -\sqrt{\dfrac{b^2-a^2}{2}} \\ y_6 = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{b^2-a^2}{4}} \\ z_6 = -\dfrac{1}{3}a \end{cases}$$

درخاتمه به کثیرالجمله‌های «متقارن منفی» می‌پردازیم

کثیر الجملهٔ $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ را « متقارن منفی» گویند وقتی که جا به جا کردن هر دو متغیر دلخواه آن را تغییر علامت دهد ، یعنی :

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = -g(x_2, x_1, x_3, \ldots, x_n)$$
$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = -g(x_3, x_2, x_1, \ldots, x_n)$$

و غیره .

ساده ترین مثال برای یك کثیرالجملهٔ «متقارن‌منفی» وقتی که دو متغیر داشته باشیم ، تفاضل آنها $x-y$ است . در حالتی که سه متغیر داشته باشیم کثیرالجملهٔ :

$$\Delta(x, y, z) = (x-y)(x-z)(y-z)$$

متقارن منفی است ، زیرا روشن است که با جا به‌جا کردن هر دو متغیر آن عبارت تغییر علامت می‌دهد .

به‌طور کلی درحالت n متغیر x_1 و x_2 و .... و x_n کثیر-

الجمله‌ای که از ضرب عبارتهای $x_i - x_j$ $(i<j)$ بدست آمده باشد متقارن منفی خواهد بود .

$$\Delta(x_1 و x_2 و \ldots و x_n) = \prod_{i<j} (x_i - x_j) =$$

$$(x_1 - x_2))x_2 - x_3) \cdots (x_{n-1} - x_n) \quad (18)$$

چنین کثیرالجمله‌ای را «دیسکریمینانت» [Discriminant] گویند .

صورت ضرب (۱۸) دارای $\frac{n(n-1)}{2}$ عامل ضرب است که هر یك از این عوامل هم از درجهٔ اول هستند و بنا بر این کثیرالجملهٔ $\Delta(x_1 و x_2 و \ldots و x_n)$ نسبت به x_1 و x_2 و ... و x_n از درجهٔ $\frac{n(n-1)}{2}$ است .

واضح است که اگر $f(x_1 و x_2 و \ldots و x_n$ کثیرالجملهٔ متقارنی از x_1 و x_2 و ... و x_n باشد ، در این‌صورت، صورت ضرب :

$$\Delta(x_1 و x_2 و \ldots و x_n) \cdot f(x_1 و x_2 و \ldots و x_n)$$

کثیرالجملهٔ متقارن منفی خواهد بود .

قضیهٔ ۲ـ هر کثیر الجملهٔ متقارن منفی

$$g(x_1 و x_2 و \dots و x_n)$$

از n متغیر x_1وx_2و...وx_nمی‌تواند به صورت :

$$g(x_1 و x_2 و \dots و x_n) =$$
$$\Delta(x_1 و x_2 و \dots و x_n) \cdot f(x_1 و x_2 و \dots و x_n)$$

تبدیل شود که در آن $f(x_1 و x_2 و \dots و x_n)$ کثیر الجملهٔ متقارنی نسبت‌به این متغیرها باشد. به طوری که‌اگر $g(x_1 و x_2 و \dots و x_n)$ عبارتی ازدرجهٔ k باشدعبارت‌متقارن

$$f(x_1 و x_2 و \dots و x_n)$$

از درجهٔ $k - \frac{n(n-1)}{2}$ خواهد بود.

اثبات ـ طبق تعریف عبارتهای متقارن منفی داریم :

$$g(x_1 و x_2 و \dots و x_n) = -g(x_2 و x_1 و \dots و x_n)$$

در حالت $x_1 = x_2$ این تساوی به‌صورت زیر در خواهدآمد :

$$g(x_1 و x_2 و x_3 و \dots x_n) = -g(x_2 و x_1 و x_3 و \dots x_n)$$

و بنابراین خواهیم داشت :

$$g(x_1 و x_2 و x_3 و \dots و x_n) = 0$$

دراین‌صورت اگر کثیرالجملهٔ $g(x_1 و x_2 و \dots و x_n)$

را کثیرالجمله‌ای نسبت به x_1 بدانیم $x_1 = x_2$ یکی از ریشه‌

های آن خواهد بود و بنابراین عبارت $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
بدون باقیمانده بر $x_1 - x_2$ قابل‌قسمت خواهد بود . به‌همین
ترتیب می‌توان ثابت کرد کــه این عبارت بر هر تفاضل
$x_i - x_j \, (i<j)$ و بنـــابراین بـر « دیسکریمینانـت »
$\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ قابل قسمت است یعنی می‌توان نوشت :

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$
$$= \Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

که در آن $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ کثیر الجمله‌ای از متغیرهای
$x_1, x_2, \ldots, x_n$ است که درجهٔ آن‌مساوی $k - \frac{n(n+1)}{2}$
می‌باشد .

اکنون بایستی ثابت کنیم که کثیرالجملهٔ :

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{g(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

یك کثیرالجملهٔ متقارن است . و این هم واضح است، زیرا
با جابه جا کردن هردو متغیر x_1, x_2 صورت و مخرج کسر
هردو تغییر علامت می‌دهندودر نتیجه خودکسر تغییر نمی‌کند.

نمونه‌هایی ازمورد استعمال این‌قضیه را درحل‌مسائل

جبر ذکر می‌کنیم :

مثال ۱۱ ـ عبارت زیر را به‌صورت ضرب عوامل‌اول تجزیه کنید :

$$g(x\text{ و }y\text{ و }z)=(x-y)^{۳}+(y-z)^{۳}+(z-x)^{۳}$$

واضح است که این‌کثیرالجملهٔ متقارن منفی‌است و بنابراین بر $\Delta(x\text{ و }y\text{ و }z)=(x-y)(x-z)(y-z)$ قابل‌قسمت است. چون $g(x\text{ و }y\text{ و }z)$ و $\Delta(x\text{ و }y\text{ و }z)$ هر دو از درجهٔ سوم هستند بنابراین می‌توان نوشت :

$$g(x\text{ و }y\text{ و }z)=k\cdot\Delta(x\text{ و }y\text{ و }z) \qquad (۱۹)$$

برای پیداکردن ضریب k درتساوی فوق. $x=$ و $۱=y$ و $۲=z$ قرار می‌دهیم‌که $k=-۳$ خواهد شد.

بنابراین :

$$(x-y)^{۳}+(y-z)^{۳}+(z-x)^{۳}=$$
$$=۳(x-y)(y-z)(z-x)$$

(برای پیدا کردن ضریب k می‌توان از این راه هم استفاده کرد که مثلاً در دو طرف تساوی (۱۹) ضریب $x^{۲}y$ را مساوی قرار دهیم) .

این مسئله را با استفاده از خواص کثیر الجمله‌های

متقارن هم می‌توان حل کرد به این ترتیب که اگر فرض کنیم :

$$u = x - y \text{ و } v = y - z \text{ و } w = z - x$$

خواهیم داشت :

$$(x-y)^۳+(y-z)^۳+(z-x)^۳=u^۳+v^۳+w^۳$$

و در ضمن داریم :

$$\sigma_۱ = u+v+w=(x-y)+(y-z)+(z-x)=۰$$

و بنابراین با توجه به رابطهٔ دوم از روابط (۷) خواهیم داشت :

$$u^۳+v^۳+w^۳=۳\sigma_۳-۳u\cdot v\cdot w$$

ویا :

$$(x-y)^۳+(y-z)^۳+(z-x)^۳=$$
$$=۳(x-y)(y-z)(z-x)$$

مثال ۱۲ ـ عبارت زیر را به صورت ضرب عوامل اول تجزیه کنید :

$$g(x \text{ و } y \text{ و } z)=yz(y^۲-z^۲)+$$
$$+xz(z^۲-x^۲)+xy(x^۲-y^۲)$$

می‌توان نوشت :

$$g(x\text{و}y\text{و}z)=\Delta(x\text{و }y\text{و }z)\cdot f(x \text{ و } y \text{ و } z)$$

که در آن $f(x \text{ و } y\text{و}z)$ عبارت متقارن درجهٔ اولی نسبت به x و y و z می‌باشد و بنابراین می‌توان نوشت :

$$yz(y^2-z^2)+xz(z^2-x^2)+xy(x^2-y^2)=$$
$$=k(x+y+z)(x-y)(x-z)(y+z)\ .$$

که برای محاسبهٔ k می‌توان فی‌المثل $x=0$ و $y=1$ و $z=2$ فرض کرد و در این‌صورت $k=1$ می‌شود.

$$yz(y^2-z^2)+xz(z^2-x^2)+xy(x^2-y^2)=$$
$$=(x+y+z)(x-y)(x-z)(y-z)$$

مثال ۱۳ ــ عبارت زیررا خلاصه کنید :

$$A=\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}$$

ابتدا عبارت‌را به‌یك مخرج تحویل می‌کنیم :

$$A=\frac{(a-b)(b+c)(c+a)+(b-c)(a+b)\ (c+a)+}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$
$$+\frac{(c-a)(a+b)(b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

از طرف دیگر توجه به اینکه :

$\Delta(a\text{و}b\text{و}c)=(a-b)(a-c)(b-c)$ باشد داریم :

A صورت‌کسر $=k\ (a-b)\ (a-c)\ (b-c)$

و به سادگی $k=1$ بدست خواهد آمد و بنابراین خواهیم داشت :

$$A=\frac{(a-b)(a-c)(b-c)}{(a+b)(a+c)(b+c)}$$

مثال ۱۴ ــ عبارت زیر را بــه صورت ضرب عــوامل

اول تجزیه کنید :

$$B=x^3(y^2-z^2)+y^3(z^2-x^2)+z^3(x^2-y^2)$$

داریم :

$$B=\Delta(x, y, z)\cdot f(x, y, z)$$

که در آن $f(x, y, z)$ عبارت متقارنی نسبت به x، y و z است . از قضیهٔ ۱ نتیجه می‌شود که :

$$f(x, y, z)=k\sigma_1^2+l\sigma_2$$

و بنابراین داریم :

$$B=(x-y)(x-z)(y-z)\times$$
$$\times[k(x+y+z)^2+l(xy+xz+yz)]$$

و برای محاسبه k و l می‌توان از روش ضرایب نامعین استفاده کرد به این معنی که مثلاً یکبار $x=-1$ و $y=0$ و $z=1$ و دفعهٔ دیگر $x=0$ و $y=1$ و $z=2$ فرض کنیم که در نتیجه $l=1$ و $k=0$ بدست خواهد آمد و بنابراین خواهیم داشت:

$$x^3(y^2-z^2)+y^3(z^2-x^2)+z^3(x^2-y^2)=$$
$$=(x-y)(x-z)(y-z)(xy+xz+yz)$$

☆ ☆☆

کثیرالجمله‌های « متقارن منفی » که دارای توانهای

زوج باشند متقارن اند، در حالت خاص عبارت های «دیسکریمینانت» مربع کامل عبارتهای متقارنی هستند و بنابراین می‌توان آنهارا همچون عبارتهای متقارن ساده‌نمود. به‌عنوان مثال عبارت دیسکریمینانت ازسه متغیررا در نظر می‌گیریم. مربع چنین عبارتی نسبت به‌سه‌متغیرمتقارن خواهدبود.

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_2 - x_3)^2$$

که از درجهٔ ششم است و بنابراین قابل بیان برحسب σ_1 و σ_2 و σ_3 خواهد بود، ابتدا بایستی ریشه‌های صحیح‌ومثبت معادلهٔ زیر را پیدا کرد:

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 6$$

جوابهای صحیح معادله درجدول زیر داده شده‌است:

λ_1	λ_2	λ_3
۶	۰	۰
۴	۱	۰
۳	۰	۱
۲	۲	۰
۱	۱	۱
۰	۳	۰
۰	۰	۲

بنابراین $f(x_1, x_2, x_3)$ به صورت زیر خواهد بود :

$$(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2=$$
$$=A\sigma_1^6+B\sigma_1^4\sigma_2+C\sigma_1^3\sigma_3+D\sigma_1^2\sigma_2^2+ \qquad (20)$$
$$+E\sigma_1\sigma_2\sigma_3+F\sigma_2^3+G\sigma_3^2$$

این تساوی به‌ازاء مقادیر x_3 و x_2 و x_1 صادق است.

ابتدا $x_1=1$ و $x_2=x_3=0$ می‌گیریم ، در این صورت $\sigma_1=1$ و $\sigma_2=\sigma_3=0$ و $f(x_1, x_2, x_3)=0$ خواهد شد و بنابراین ازتساوی (۲۰) مقدار $A=0$ بدست خواهدآمد.

اکنون اگر $x_1=1$ و $x_2=-1$ و $x_3=0$ انتخاب کنیم $\sigma_1=0$ و $\sigma_2=-1$ و $\sigma_3=0$ و $f(x_1, x_2, x_3)=4$ خواهد شدکه دراین‌صورت $F=-4$ می‌شود واگر به‌همین ترتیب ادامه دهیم تمام ضرایب بدست خواهندآمدوخواهیم داشت :

$$(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2=-4\sigma_1^3\sigma_3+ \qquad (21)$$
$$+\sigma_1^2\sigma_1^2+18\sigma_1\sigma_2\sigma_3-4\sigma_2^3-27\sigma_3^2$$

از نتیجهٔ بدست آمده فی‌المثل می‌توان در حل مسئلهٔ زیر استفاده‌کرد :

مثال ۱۵ ـ دستگاه زیر را حل کنید :

$$\begin{cases} x+y+z=۶ \\ xy+xz+yz=۱۱ \\ (x-y)(x-z)(y-z)=-۲ \end{cases}$$

اینجا هم دستگاه را برحسب σ_1 و σ_2 و σ_3 می‌نویسیم . از دو معادلهٔ اول نتیجه می‌شود که $\sigma_1=۶$ و $\sigma_2=۱۱$ است اکنون اگر معادلهٔ سوم دستگاه را بر حسب σ_1 و σ_2 و σ_3 بنویسیم باتوجه به‌اینکه مقادیر σ_1 و σ_2 معلوم‌است معادلهٔ یك‌مجهولی بر حسب σ_3 بدست خواهیم آورد ، از آنجا σ_3 و در نتیجه x_1 و x_2 و x_3 بدست خواهد آمد .

ولی سمت چپ معادلهٔ سوم یك عبارت متقارن منفی است و اگر بخواهیم به یك عبارت متقارن تبدیل‌شود طرفین آنرا به‌توان دو می‌رسانیم:

$$(x-y)^۲(x-z)^۲(y-z)^۲=۴$$

با توجه به رابطهٔ (۲۱) خواهیم داشت :

$$-۴\sigma_1^۳\sigma_3+\sigma_1^۲\sigma_2^۲+۱۸\sigma_1\sigma_2\sigma_3-۴\sigma_2^۳-۲۷\sigma_3^۲=۴$$

و باتوجه به اینکه $\sigma_1=۶$ و $\sigma_2=۱۱$ می‌باشدخواهیم‌داشت:

$$\sigma_3^۲-۱۲\sigma_3+۳۶=۰$$

و در نتیجه $\sigma_3=۶$ خواهد شد .

اکنون بادردست داشتن مقادیر σ_1 و σ_2 و σ_3 می‌توان معادلهٔ درجهٔ سوم زیر را تشکیل داد که x و y و z ریشه‌های آن خواهد بود.

$$u^3 - 6u^2 + 11u - 6 = 0$$

و ریشه‌های این معادله $u_1 = 1$ و $u_2 = 2$ و $u_3 = 3$ می‌باشد.

مقادیر u_1 و u_2 و u_3 همان مقادیر x و y و z هستند و در نتیجه ۶ دسته جواب برای x و y و z بدست می‌آید، ولی هرشش دسته جواب در دستگاه صدق نمی‌کند، زیرا معادلهٔ سوم دستگاه را به‌توان ۲ رساندیم وبنابراین احتمالاً ریشه‌های اضافی وارد معادله شده است.

با آزمایش ریشه‌ها، جوابهای دستگاه چنین‌خواهد بود:

$$\begin{cases} x_3 = 3 \\ y_3 = 1 \\ z_3 = 2 \end{cases} \quad و \quad \begin{cases} x_2 = 2 \\ y_2 = 3 \\ z_2 = 1 \end{cases} \quad و \quad \begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 2 \\ z_1 = 3 \end{cases}$$

✩✩✩

اکنون تمریناتی که می‌توان با استفاده از روشهای بالا به حل آنها موفق شد در زیر می‌آوریم:

۱ـ عبارتهای متقارن زیر را به صورت ضرب عوامل اول بنویسید :

۱ـ $(x+y)(x+z)(y+z)+xyz$

۲ـ $2(a^3+b^3+c^3)+a^2b+a^2c+b^2a+$
$+b^2c+c^2a+c^2b-3abc$

۳ـ $a^3(b+c)+b^3(c+a)+c^3(a+b)+$
$+abc(a+b+c)$

۴ـ $a^2(b+c)^2+b^2(c+a)^2+c^2(a+b)^2+$
$2abc(a+b+c)+(a^2+b^2+c^2)(bc+ac+ab)$

۵ـ $(x+y+z)^4-(y+z)^4-(z+x)^4-$
$-(x+y)^4+x^4+y^4+z^4$

۶ـ $(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5$

۷ـ $(a+b+c)^5-(-a+b+c)^5-$
$-(a-b+c)^5-(a+b-c)^5$

۲ـ عبارتهای « متقارن منفی » زیر را به صورت ضرب عوامل اول بنویسید :

۸ـ $x(y^2-z^2)+y(z^2-x^2)+z(x^2-y^2)$

۹ـ $(b-c)(a-b+c)(a+b-c)+$
$+(c-a)(a+b-c)(-a+b+c)+$
$+(a-b)(-a+b+c)(a-b+c)$

۱۰- $(b-c)(b+c)^{2}+(c-a)(c+a)^{2}$
$+(a-b)(a+b)^{2}$

۱۱- $ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$

۱۲- $a(b-c)^{3}+b(c-a)^{3}-c(a-b)^{3}$

۱۳- $x^{3}(y-z)+y^{3}(z-x)+z^{3}(x-y)$

۱۴- $x(y+z)(y^{2}-z^{2})+y(z+x)(z^{2}-x^{2})+$
$+z(x+y)(x^{2}-y^{2})$

۱۵- $(b-c)(b+c)^{3}+(c-a)(c+a)^{3}+$
$+(a-b)(a+b)^{3}$

۱۶- $(y-z)^{5}+(z-x)^{5}+(x-y)^{5}$

۱۷- $(b-c)(b+c)^{4}+(c-a)(c+a)^{4}+$
$+(a-b)(a+b)^{4}$

۱۸- $a^{4}(b-c)+b^{4}(c-a)+c^{4}(a-b)$

۱۹- $a^{2}(a+b)(a+c)(b-c)+$
$+b^{2}(b+c)(b+a)(c-a)+$
$+c^{2}(c+a)(c+b)(a-b)$

۲۰- $x^{4}(y^{2}-z^{2})+y^{4}(z^{2}-x^{2})+z^{4}(x^{2}-y^{2})$

۳- صحت اتحادهای زیر را تحقیق کنید:

۲۱- $(a+b+c)^{3}-(-a+b+c)^{3}-$
$-(a-b+c)^{3}-(a+b-c)^{3}=24abc$

۲۲- $a(-a+b+c)^2+b(a-b+c)^2+$
$$+c(a+b-c)^2+$$
$$(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)=4abc$$

۲۳- $(x+y)^4+x^4+y^4=2(x^2+xy+y^2)^2$

۲۴- $(a+b+c)^4-(b+c)^4-(c+a)^4-$
$$-(a+b)^4+a^4+b^4+c^4=12abc(a+b+c)$$

۲۵- $(a+b+c)^4+(b+c-a)^4+$
$$+(c+a-b)^4+(a+b-c)^4=4(a^4+$$
$$+b^4+c^4)+24(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)$$

۲۶- $(x+y)^5-x^5-y^5=$
$$=5xy(x+y)(x^2+xy+y^2)$$

۲۷- $(x+y)^7-x^7-y^7=$
$$=7xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^2$$

۴ - ثابت کنید که اگر $a+b+c=0$ باشد هر یك از تساویهای زیر صحیح است (۱) :

۲۸- $a^3+b^3+c^3=3abc$

۲۹- $a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)c+a=0$

---

۱) یادآوری می‌کنیم که اگر $a=x-y$ و $b=y-z$ و $c=z-x$ باشد $a+b+c=0$ خواهد شد . بنابراین اگر در هر یك از تمرینات بجای a و b و c مقادیر آنها را برحسب x و y و z قرار دهیم روابط جدیدی بدست خواهد آمد که به‌ازاء هر مقدار دلخواه x و y و z صادق خواهند بود .

۳۰- $a^2(b+c)^2+b^2(c+a)^2+c^2(a+b)^2+$
$+(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca)=0$

۳۱- $a^4+b^4+c^4=2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)=$
$=2(ab+bc+ca)^2=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)^2$

۳۲- $2(a^5+b^5+c^5)=5abc(a^2+b^2+c^2)$

۳۳- $6(a^5+b^5+c^5)=$
$=5(a^3+b^3+c^3)(a^2+b^2+c^2)$

۳۴- $10(a^7+b^7+c^7)=$
$=7(a^2+b^2+c^2)(a^5+b^5+c^5)$

۳۵- $6(a^7+b^7+c^7)=$
$=7(a^3+b^3+c^3)(a^4+b^4+c^4)$

۳۶- $25(a^7+b^7+c^7)(a^3+b^3+c^3)=$
$=21(a^5+b^5+c^5)^2$

۳۷- $50(a^7+b^7+c^7)^2=$
$=49(a^4+b^4+c^4)(a^5+b^5+c^5)^2$

۳۸- $\left(\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right)\times$
$\times\left(\frac{c}{a-b}+\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}\right)=9$

۵- عبارتهای زیررا ساده‌کنید :

۳۹ـ $$\frac{x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)}{x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)}$$

۴۰ـ $$\frac{x^4(y^2-z^2)+y^4(z^2-x^2(+z^4(x^2-y^2)}{x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)}$$

۴۱ـ $$(a+b+c+d)(a^2+b^2+c^2+d^2)-$$
$$-ab-ac-ad-bc-db-cd^2$$

۴۲ـ $$\frac{1}{(p+q)^3}\left(\frac{1}{p^3}+\frac{1}{q^3}\right)+$$
$$+\frac{3}{(p+q)^4}\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}\right)+\frac{6}{(p+q)^5}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)$$

۴۳ـ $$\frac{1}{a(a-b)(a-c)}+\frac{1}{b(b-a)(b-c)}+$$
$$+\frac{1}{c(c-a)(c-b)}+$$

۴۴ـ $$\frac{1}{a^2(a-b)(a-c)}+\frac{1}{b^2(b-a)(b-c)}$$
$$+\frac{1}{c^2(c-a)(c-b)}$$

۶ـ دستگاههای زیر را حل کنید :

۴۵ـ $$\begin{cases} x+y=7 \\ \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{25}{12} \end{cases}$$

۴۶- $\begin{cases} x+xy+y=۰ \\ x^۳+x^۳y^۳+y^۳=۱۲ \end{cases}$

۴۷- $\begin{cases} x+y=۵ \\ x^۲-xy+y^۲=۷ \end{cases}$

۴۸- $\begin{cases} x+y=a \\ x^۴+y^۴=a^۴ \end{cases}$

۴۹- $\begin{cases} x+y=a \\ x^۳+y^۳=b(x^۲+y^۲) \end{cases}$

۵۰- $\begin{cases} x+y=۱ \\ x^۴+y^۴=۷ \end{cases}$

۵۱- $\begin{cases} x+y+xy=۷ \\ x^۲+y^۲+xy=۱۳ \end{cases}$

۵۲- $\begin{cases} x+y=a \\ x^۵+y^۵=b^۵ \end{cases}$

۵۳- $\begin{cases} xy=۱۵ \\ x+y+x^۲+y^۲=۴۲ \end{cases}$

۵۴- $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=12 \\[2ex] \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{3} \end{cases}$

۵۵- $\begin{cases} x^2+xy+y^2=4 \\ x+xy+y=2 \end{cases}$

۵۶- $\begin{cases} 2(x+y)=5xy \\ 8(x^3+y^3)=65 \end{cases}$

۵۷- $\begin{cases} x+y=a \\ x^6+y^6=a^6 \end{cases}$

۵۸- $\begin{cases} (x^2+1)(y^2+1)=10 \\ (x+y)(xy-1)=3 \end{cases}$

۵۹- $\begin{cases} x+y=a \\ x^7+y^7=a^7 \end{cases}$

۶۰- $\begin{cases} x^3+y^3+xy(x+y)=13 \\ x^2y^2(x^2+y^2)=468 \end{cases}$

۶۱- $\begin{cases} x^2+xy+y^2=39 \\ x^4-x^2+y^4-y^2=612 \end{cases}$

$$۶۲-\begin{cases} ۷(x^۵+y^۵)=۳۱(x^۳+y^۳) \\ x^۲+xy+y^۲=۳ \end{cases}$$

$$۶۳-\begin{cases} x^۲+xy+y^۲=۱ \\ x^۴+x^۲y^۲+y^۴=a^۲ \end{cases}$$

$$۶۴-\begin{cases} x+y+z=۲ \\ x^۲+y^۲+z^۲=۶ \\ x^۳+y^۳+z^۳=۸ \end{cases}$$

$$۶۵-\begin{cases} x^۲-xy+y^۲=۷ \\ x^۴+x^۲y^۲+y^۴=۹۱ \end{cases}$$

$$۶۶-\begin{cases} xy=a^۲-b^۲ \\ x^۴+y^۴=۲(a^۴+۶a^۲b^۲+b^۴) \end{cases}$$

$$۶۷-\begin{cases} x+y+z=۹ \\ \frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}+\frac{۱}{z}=۱ \\ xy+xz+yz=۲۷ \end{cases}$$

$$۶۸-\begin{cases} (x-y)(x^۲-y^۲)=۱۶ \\ (x+y)(x^۲+y^۲)=۴۰ \end{cases}$$

۶۹-
$$\begin{cases} x+y+z+u=1 \\ x^2+y^2+z^2+u^2=9 \\ x^3+y^3+z^3+u^3=1 \\ x^4+y^4+z^4+u^4=33 \end{cases}$$

۷۰-
$$\begin{cases} xy(x+y)=30 \\ x^3+y^3+35 \end{cases}$$

۷۱-
$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ (x+y)(y+z)+(y+z)(z+x)+ \\ +(z+x)(x+y)=1 \\ x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)= \\ =-6 \end{cases}$$

۷۲-
$$\begin{cases} yx(y^2-z^2)+xz(z^2-x^2)+ \\ +xy(x^2-y^2)=-2 \\ x^3(y^2-z^2)+y^3(z^2-x^2)+ \\ +z^3(x^2-y^2)=-22 \\ (x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3=6 \end{cases}$$

۷۳-
$$\begin{cases} x+y+z+u=a \\ x^2+y^2+z^2+u^2=a^2 \\ x^3+y^3+z^3+u^3=a^3 \\ x^4+y^4+z^4+u^4=a^4 \end{cases}$$

۷۴ ـ ثابت کنید که اگر داشته باشیم ،

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$$

تساوی زیر برای هر مقدار n صحیح است :

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^n=\frac{1}{a^n+b^n+c^n}=\frac{1}{(a+b+c)^n}$$

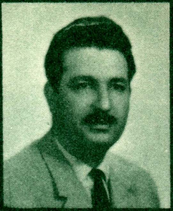
۷۵ـ دستگاه زیر را حل کنید :

$$x+y=a \text{ و } x^2+y^2=b \text{ و } x^3+y^3=c$$

۷۶ـ اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $x^2+px+q=0$ باشد حاصل‌عبارت $\alpha^k+\beta^k$ را به‌ازاء $k=\pm1$ و ±2 و ±3 و ∓4 و ±5 محاسبه کنید.

۷۷ـ ثابت کنید که اگر عبارت متقارن $f(x,y)$ بر $x-y$ بخش پذیر باشد بر $(x-y)^2$ نیز بخش پذیراست .

پایان



مترجم این کتاب :

درسال ۱۳۰۵ درکرمان متولد شده تحصیلات ابتدایی و متوسطه را در کرمان به پایان رسانید . چون از دانشسرای مقدماتی فارغ‌التحصیل شده بود، تنها می‌توانست در دانشکدهٔ علوم و دانشسرای عالی ادامهٔ تحصیل دهد . و بالاخره در سال ۱۳۳۲ این دو دانشکده را در رشتهٔ ریاضی به پایان رسانید . از زمانی که خود در سال سوم متوسطه تحصیل می‌کرد به کار تدریس علوم ریاضی مشغول بوده هم‌اکنون هم کار اصلی ایشان همان تدریس است . علاوه بر آن از ابتدای انتشار، سردبیری مجلهٔ سخن علمی را برعهده دارند و با مطبوعات و نشریات علمی همکاری می‌کنند .

در قلمرو ریاضیات منتشر شده است:

دورهٔ اختصاصی جبر مقدماتی
روش‌های جبر
مسائل مسابقات ریاضی شوروی
تقارن در جبر
در قلمرو ریاضیات
مثلثات (مستقیم‌الخط و کروی)
ریاضی‌دانان نامی

بها : ۳۰ ریال

کتابهای سیمرغ :

۱- تاریخ حساب	ترجمهٔ پرویز شهریاری	۳۰ ریال
۲- تمدن فرانسه	ترجمهٔ روح‌الله عباسی	۲۵ »
۳- انرژی اتمی	ترجمهٔ حسن صفاری	۳۵ »
۴- سرگرمیهای فیزیک «جلد اول»	ترجمهٔ مهندس احمد تمدن	۶۰ »
۵- نیمه هادیها	ترجمهٔ صمد خیرخواه	۲۵ »
۶- زندگی در دریا	ترجمهٔ مهدی تجلی‌پور	۳۵ »
۷- تقارن	ترجمهٔ پرویز شهریاری	۳۰ »
۸- فن شنا	ترجمهٔ اسماعیل فیاضی و - مشرف‌الملک	۳۵ »
۹- ماجراهای جاودان درفلسفه	ترجمهٔ انوشه سارا	۸۰ »
۱۰- سرطان	ترجمهٔ دکترایرج رفعانی	۳۵ »
۱۱- نسبیت برای همه	ترجمهٔ احمدآرام	۳۰ »
۱۲- نازیسم	ترجمهٔ محمد مربوط ومحمد- باقر مؤمنی	۲۵ »
۱۳- هندسه درگذشته وحال	ترجمهٔ پرویز شهریاری	۲۵ »
۱۴- جستجوی طلا	ترجمهٔ علیقلی کاتبی	۲۰ »
۱۵- انرژی اتمی	ترجمهٔ ابراهیم بهداد	۴۵ »
۱۶- تفریحات ریاضی	ترجمهٔ هرمز شهریاری	۳۰ »
۱۷- علم فضا	ترجمهٔ عارف قلی‌نیا	۶۰ »
۱۸- تمدنهای آفریقا	ترجمهٔ مسعود آشریان و- حجت‌الله ستوده	۴۰ »
۱۹- اعداد اول	ترجمهٔ پرویز شهریاری	۴۰ »
۲۰- سرودهای دینی یارسان	ترجمهٔ ماشاءالله سوری	۴۵ »
۲۱- مسایل روان‌تنی کودکان	ترجمهٔ دکترمسعود میربهاء	۶۰ »
۲۲- ایران درجنگ جهانی اول	ترجمهٔ ع . دخانیاتی	۲۵ »
۲۳- زندگی درسیارات دیگر	ترجمهٔ عباسقلی جلی	۳۵ »
۲۴- ابعاد فیزیکی	تألیف عارف قلی‌نیا	۳۰ »
۲۵- مثلثات	ترجمهٔ پرویزشهریاری	۴۰ »
۲۶- راهنمایی‌های پزشکی	ترجمهٔ صادق سرابی	۶۰ »
۲۷- رابرت اون مبشر - نهضت‌های تعاونی	ترجمهٔ حسین سالکی	۷۰ »

۲۸- الکترون	ترجمهٔ محسن جاویدان	۴۰ریال
۲۹- تلاش برای زندگی	ترجمهٔ مهدی تجلی‌پور	۵۵ »
۳۰- اسرار دریا	ترجمهٔ هوشنگ قربان‌نژاد	۶۰ »
۳۱- سرگرمیهای ریاضی	ترجمهٔ پرویز شهریاری	۵۵ »
۳۲- خاطرات کلنل کاساکوفسکی	ترجمهٔ عباسقلی جلی	۴۰ »
۳۳- ابومسلم خراسانی	ترجمهٔ شفیعی کدکنی	۳۰ »
۳۴- نظریهٔ نسبیت چیست؟	ترجمهٔ حسن نیروئی	۲۵ »
۳۵- مبداء زمین وسیارات	ترجمهٔ فروتن	۳۰ »
۳۶- کلید علوم	تهیه‌وتنظیم جهانگیر صلح‌جو	۵۵ »
۳۷- فرسایش ودگرگونی زمین	ترجمهٔ احمد ایرانی	۵۰ »
۳۸- کلید اطلاعات عمومی	تهیه‌وتنظیم محمدحسین‌مستعانی	۴۰ »
۳۹- هگل وفلسفهٔ جدید	ترجمهٔ حمید حمید	۴۰ »
۴۰- سرگرمیهای فیزیك جلددوم	ترجمهٔ مهندس احمد تمدن	۶۰ »
۴۱- نجوم	ترجمهٔ مسعود نعمتی	۶۰ »
۴۲- بحثی درقضیهٔ فیثاغورث	ترجمهٔ احمد آرام	۳۰ »
۴۳- ساختمان مولکولی	ترجمهٔ دکترقاسم خدادادی	۳۵ »
۴۴- ایران در آستانهٔ انقلاب‌ـ مشروطیت	تألیف: باقرمؤمنی	۳۰ »
۴۵- بیکاری	ترجمه وتألیف: جعفر سپهر	۶۰ »
۴۶- روش نوین عکاسی	مرتضی عریضی	۴۰ »
۴۷- خط وخطاطان	ابوالقاسم رفیعی مهرآبادی	۴۵ »
۴۸- تا ۵۰- ۳۳۳ چهرهٔ درخشان	محمد حسین مقصودلو ـ علیرضا تبریزی	۱۵۰ »
۵۱- فن ورزش	ژان‌دوون. ترجمهٔ منیرجزنی	۳۰ »
۵۲- اردبیل شهرمقدس	جمشید ملکی	۳۰ »
۵۳- ازآتش تا اتم	مهندس سیروس لطفی	۳۰ »
۵۴- چگونه انسان غول شد	ترجمهٔ آذر آریان‌پور	۶۰ »
۵۵- پیدایش انسان وآغاز‌ـ شهرنشینی	تألیف: یوسف فضائی	۵۵ »
۵۶- تاریخ مطبوعات ایران وجهان	تألیف : جهانگیر صلح‌جو	۶۰ »
۵۷- فلسفه وعلوم طبیعت	فریبرز بوربور	۷۰ »

کتابهای سیمرغ

این کتاب به سرمایهٔ مؤسسهٔ انتشارات امیرکبیر چاپ شده است .